

Оценка стоимости азиатских и basket-опционов через разложение в ряд Тейлора на нефтяных рынках

А.В.Куликов¹, А.И.Горева¹

¹Московский физико-технический институт (государственный университет)

Одним из самых сложных для нахождения справедливой цены производных ценных бумаг является basket-опцион в силу большого числа различных составляющих базового актива (выплата по нему $(\sum_{i=1}^k \chi_i S_i - K)^+$), где χ_i – доля i -го актива в портфеле, S_i – цена i -го актива в момент предъявления, K – страйк). Данный опцион активно используется при хеджировании портфеля, состоящего из большого числа разных активов. Соответственно, даже в простейшей модели геометрического броуновского движения не удается получить точное аналитическое представление для цены basket-опциона. Применение метода Монте-Карло, описанное в работах [1], [2], [3] имеет очень высокую сложность вычисления. Поэтому в работах [4], [5] были предложены различные аналитические приближения для нахождения справедливой цены, использующие преобразование Фурье и Лапласа.

Один из аналитических методов описал Nengjiu Ju в статье [6], основываясь на разложении Тейлора по волатильности процессов цены. Метод основан на приближении взвешенного среднего логнормально распределённых случайных величин логнормальным распределением при условии, что два первых её момента совпадают с двумя первыми моментами истинного распределения. Метод предполагает разложение отношения характеристических функций среднего и приближающей его логнормально распределённой случайной величины в ряд Тейлора в окрестности нулевой волатильности до шестой степени. Сравнение результатов показывает обоснованность применения данного метода.

Также активно используется на рынке для хеджирования азиатский опцион, выплата по которому определяется на основе усреднённой цены базового актива за некоторый промежуток времени, что важно для компании, постоянно торгующей одним и тем же активом (выплата по опциону равна $(\sum_{n=1}^N \chi_n S_n - K)^+$), где χ_n – доля n -го момента времени в хеджируемом портфеле, S_n – цена актива в момент времени n , K – страйк). В рамках данного приближения азиатский опцион может быть рассмотрен таким же образом, как и basket-опцион.

Однако на нефтяном и многих других рынках модель Блэка-Шоулза или модель геометрического броуновского движения, рассмотренная в работе [6], не учитывает такую характеристику рынка, как реверсия к среднему – стремление цены базового актива к среднему значению с течением времени. В связи с этим, в настоящей работе рассмотрена однофакторная модель с реверсией, введенная в работе [7], описываемая стохастическим дифференциальным

уравнением $\frac{dF(t,T)}{F(t,T)} = \sigma e^{-\alpha(T-t)} dW(t)$, где $F(t,T)$ – форвардная цена актива в момент t со сроком поставки T , σ обозначает волатильность цен базовых активов, а α обозначает скорость стремления к ожидаемому значению или скорость убывания волатильности форвардных цен при увеличении срока погашения.

В работе найдено аналитическое приближение стоимости азиатского и basket-опциона для модели Clewlow-Strickland в зависимости от параметров волатильности и коэффициента реверсии к среднему. Для нахождения цены азиатского опциона используется дисконтирование по текущей форвардной кривой. Для нахождения справедливых цен найдено приближительное разложение отношений характеристических функций по волатильности

$$f(z) = Ee^{i\phi X(z)} \approx 1 - i\phi d_1(z) - \phi^2 d_2(z) + i\phi d_3(z) + \phi^4 d_4(z), \text{ где}$$

$$\frac{dF(t,T)}{F(t,T)} = z\sigma e^{-\alpha(T-t)} dW(t);$$

$$X(z) = \ln\left(\sum_{i=1}^N \chi_i S_i(z, T)\right)$$

Литература

1. *Kemna A., Vorst A.* A pricing method for options based on average asset values // *Journal of Banking and Finance*. 1990. No. 14, p. 113-130.
2. *Boyle P., Broadie M., Glasserman P.* Monte Carlo methods for security pricing // *Journal of Economics Dynamics and Control*, 1997 No. 21, p. 1267-1321.
3. *Hull J., White A.* Efficient procedures for valuing European and American path-dependent options // *Journal of Derivatives*, 1993, No. 1, p. 21-31.
4. *Levy E.* Pricing European average rate currency options // *Journal of International Money and Finance*, 1992, No. 11, p. 474-491
5. *Fu M., Madan D., Wang T.* Pricing continuous Asian options: A comparison of Monte Carlo and Laplace transform inversion methods.// *Journal of Computational Finance*, 1999, No. 2, p. 49-74
6. *Nengjiu Ju.* Pricing Asian and Basket Options Via Taylor Expansion // *Journal of Computational Finance*. 2002. V.5. No.3.
7. *Clewlow L., Strickland Ch.* Valuing Energy Options in a One Factor Model Fitted to Forward Prices // *Sydney*. 1999.