

Распределение токов в сечении печатного кольца с широким проводником при резонансе

А.В. Савельев, Н.П. Чубинский

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Введение

В настоящее время большой интерес представляют плоские (печатные) кольца, в том числе, когда ширина его проводника R_b соизмерима с радиусом R . В работе [1] разработан алгоритм и проведены вычисления индуктивностей и сопротивлений плоских колец с широким проводником в широком частотном диапазоне применимости квазистатического приближения в нерезонансном случае. Такие элементы находят широкое применение в радиоаппаратуре СВЧ диапазона и при создании искусственных сред с эффективной магнитной проницаемостью менее единицы [2]. Обнаружены сильные дисперсионные эффекты, связанные с частотными свойствами индуктивности и активного сопротивления печатных колец [1], которые объясняются радикальными изменениями распределения плотности тока в сечении кольца. Так, например, отношение плотности тока в максимуме к плотности тока в минимуме может достигать до 400 и более. Потом были обнаружены зависимости индуктивности кольца от способа его возбуждения. Так, например, при возбуждении магнитным полем плоского кольца с относительной шириной проводника равной 0.97 (отношение ширины проводника к радиусу кольца, случай очень широкого проводника), при изменении частоты от 100 кГц до 100 МГц, величина индуктивности увеличивается в 1.7 раза, а при возбуждении от источника э.д.с. – уменьшается приблизительно во столько же раз. Эти интересные эффекты связаны с изменениями распределения плотности тока в сечении печатного кольца при изменении частоты, а также с его геометрией. Затем было обнаружено, что при возбуждении плоского кольца внешним магнитным полем индуктивность и сопротивление кольца меняется при нагрузке кольца внешним импедансом. Важным частным случаем является резонанс токов в нагруженном кольце, исследованию которого посвящена данная работа.

Цель работы и метод решения задачи

Целью данной работы является исследование радиотехнических свойств печатных колец квазистатических размеров с широким проводником при настройке в резонанс. Для этого в разрыв проводника вводится конденсатор (как сосредоточенный радиотехнический элемент).

Рассмотрим проводящее кольцо толщиной $a=36$ мкм с внешним радиусом $R=1152$ мкм и внутренним радиусом R_b , возбуждаемое магнитным полем с единичной индукцией \vec{B}_0 с частотой ω и нагруженное внешним емкостным сопротивлением. Геометрия задачи показана на рис.1. Для решения задачи используем следующий алгоритм. Решим задачу для замкнутого кольца ($\vec{Z}_H = 0$), это будет режим короткого замыкания (КЗ). Для расчета распределения плотности тока в сечении кольца при разных уровнях скин-эффекта оно разбивается на множество соосных элементарных контуров (колец квадратного сечения), внутри которых распределение токов можно считать равномерным. Пронумеровав элементы разбиения, запишем систему линейных уравнений, описывающих распределения токов в квазистатическом приближении [1]:

$$\vec{I}_i \vec{Z}_i + j\omega \sum_{i \neq j} M_{ij} \vec{I}_j = \vec{\mathcal{E}}_i = -j\omega \vec{B}_0 S_i, \quad (1)$$

где $\vec{\mathcal{E}}_i$ – э.д.с., наводимая внешним полем в i -том элементе разбиения кольца, находим распределение токов в его сечении ($i = 1, 2, \dots, N$). В (1) M_{ij} – взаимная индуктивность между i -тым и j -тым элементарными кольцевыми контурами, обусловленными разбиением сечения печатного кольца, а S_i – площадь, охватываемая i -тым элементарным контуром. Сумма найденных

токов определяет ток КЗ – $\sum \vec{I}_i = \vec{I}_0$. Решив систему уравнений (1), найдем распределение токов для замкнутого кольца.

Если кольцо разомкнуто ($\vec{Z}_H \rightarrow \infty$), то в его зазоре AB возникает э.д.с. \vec{U}_{xx} (Рис. 2) или напряжение холостого хода (XX). Распределение токов в сечении кольца определяется теперь системой $N + 1$ уравнений:

$$\vec{I}_i \vec{Z}_i + j\omega \sum_{i \neq j} M_{ij} \vec{I}_j + j\omega \vec{B}_z S_i = \vec{U}_{xx}, \quad (2.1)$$

$$\sum_i \vec{I}_i = \vec{I}_{xx} = 0 \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1) лучше представить в виде:

$$\vec{I}_i \vec{Z}_i + j\omega \sum_{i \neq j} M_{ij} \vec{I}_j - \vec{U}_{xx} = -j\omega \vec{B}_z S_i. \quad (2.1a)$$

Решив эту систему, получим вектор $\{\vec{I}_i\}$ и э.д.с. \vec{U}_{xx} .

Вторые слагаемые в уравнениях (1) и (2.1) можно трактовать двояко. Во-первых, как э.д.с., вносимые из $N - 1$ контуров в i -тый контур, а во-вторых, как вносимые из тех же $N - 1$ контуров импедансы $\vec{Z}_{ij} = j\omega M_{ij}$. Во втором случае уравнение (1) можно записать в виде:

$$\vec{I}_i \vec{Z}_i + \sum_{i \neq j} \vec{Z}_{ij} \vec{I}_j = \vec{I}_i \left[\vec{Z}_i + \sum_{i \neq j} \vec{Z}_{ij} (\vec{I}_j / \vec{I}_i) \right] = -j\omega \vec{B}_z S_i. \quad (3)$$

Выражения в квадратных скобках представляют собой суммарный импеданс i -го контура для режима КЗ:

$$\vec{Z}_{\Sigma i}^{K3} = \vec{Z}_i + \sum_{i \neq j} \vec{Z}_{ij} (\vec{I}_j / \vec{I}_i) = -j\omega \vec{B}_z S_i / \vec{I}_i. \quad (4)$$

Для режима XX аналогично:

$$\vec{Z}_{\Sigma i}^{xx} = (\vec{U}_{xx} - j\omega \vec{B}_z S_i) / \vec{I}_i. \quad (4a)$$

Ток КЗ \vec{I}_0 и э.д.с. XX связаны простым соотношением: $\vec{I}_0 = \vec{U}_{xx} / \vec{Z}_{\Sigma i}$, где

$$\vec{Z}_{\Sigma i}^{-1} = \sum (\vec{Z}_{\Sigma i}^{K3})^{-1} \quad (5)$$

– суммарная внутренняя проводимость всех элементарных контуров (Рис. 3).

Если разомкнутое кольцо нагрузить импедансом \vec{Z}_H , то ток \vec{I}_0 разделится на две параллельные ветви $\vec{Z}_{\Sigma i}$ и \vec{Z}_H (Рис. 3а), через которые будут протекать токи \vec{I}_1 и \vec{I}_H , соответственно, а напряжение на них будет равно $\vec{U}_H \leq \vec{U}_{xx}$. Эти условия приводят к системе трёх уравнений:

$$\vec{I}_1 \vec{Z}_{\Sigma i} = \vec{I}_H \vec{Z}_H = \vec{U}_H, \quad \vec{I}_0 \vec{Z}_{\Sigma i} = \vec{U}_{xx}, \quad \vec{I}_1 + \vec{I}_H = \vec{I}_0.$$

Разрешая эту систему, получим \vec{I}_1 , \vec{I}_H и

$$\vec{U}_H = \frac{\vec{U}_{xx}}{1 + \vec{Z}_{\Sigma i} / \vec{Z}_H}. \quad (6)$$

Такой же ответ можно получить, перейдя от эквивалентной схемы с источником тока (Рис. 3а) к схеме с эквивалентным источником э.д.с. (Рис. 3б).

Теперь, заменив в уравнении (2а) \vec{U}_{xx} на \vec{U}_H , решим систему и получим распределение токов \vec{I}_i в нагруженном кольце.

Результаты

Нагрузим систему емкостным сопротивлением, введя сосредоточенную ёмкость в разрез кольца AB (рис.1). Зададимся некоторой частотой, которую будем называть резонансной (ω_0), используя значение индуктивности $L(\omega_0)$, полученное энергетическим методом для замкнутого кольца [3] на данной частоте, найдем емкость $C(\omega_0)$ и её импеданс $\vec{Z}_H(\omega_0) = -j/\omega_0 C(\omega_0)$, соответствующие резонансу. Проведя вычисления, определим распределение токов в сечении кольца и значение полного тока в данной цепи $\vec{J}_H(\omega_0)$.

Для моделирования выбраны три частоты, удовлетворяющие условиям квазистатики при выбранном размере кольца $R = 32a = 1,152$ мм (толщина фольги $a = 36$ мкм): $f_{01} = \omega_{01}/2\pi = 10$ МГц, $f_{02} = \omega_{02}/2\pi = 100$ МГц и $f_{03} = \omega_{03}/2\pi = 1000$ МГц. На каждой из частот определены радиотехнические параметры резонансных контуров для трёх характерных внутренних радиусов проводника R_b , соответствующих случаям: узкого кольца (ширина проводника $b_n = R - R_{bn}$ ($n = 1, 2, 3$) много меньше внутреннего радиуса – $b_1/R_{b1} = 1/31$), широкого кольца (ширина проводника сравнима с внутренним радиусом – $b_2/R_{b2} \approx 1$) и очень широкого кольца (ширина проводника много больше внутреннего радиуса – $b_3/R_{b3} = 31$). Параметры колебательных контуров для указанных случаев приведены в Таблице 1. Затем, для сетки частот вблизи предполагаемого резонанса выполнены расчеты распределений токов и определены частотные зависимости полного тока в кольце.

На Рис. 4. показаны резонансные характеристики печатных колец с различной шириной проводника, предварительно настроенных на частоту 10 МГц. Частотные характеристики (ЧХ) кольца с очень узким проводником (нижняя кривая на Рис. 4) имеют слабо выраженный максимум (эффективная добротность Q_1 около 2...3). Широкие и очень широкие кольца характеризуются ярко выраженным резонансом вблизи расчетной частоты, но их добротности достаточно малы: $Q_2 \approx 14$ и $Q_3 \approx 20$. Аналогичные ЧХ на частотах $f_{02} = 100$ МГц и $f_{03} = 1000$ МГц показаны на Рис.5 и Рис. 6. С ростом частоты на два порядка даже кольцо с самым узким проводником начинает слабо резонировать, а кольца с широким и очень широким проводниками имеют вполне приемлемые добротности: $Q_2 \approx 67$ и $Q_3 \approx 73$ (100 МГц) и $Q_2 \approx Q_3 \approx 300$ (1000 МГц).

Резюмируя анализ ЧХ резонансных печатных колец, следует отметить, что кольца указанного размера целесообразно использовать в частотном диапазоне выше 50...100 МГц. Все ЧХ смещены вниз, то есть все $f_{0ri} < f_{0i}$. На нижней резонансной частоте ($f_{01} = 10$ МГц) наибольший относительный сдвиг достигает около 0,5...1,0% для широкого и очень широкого проводников. Эти эффекты непосредственно связаны с изменением картины распределения плотности тока в сечении кольца, особенно при большой относительной ширине проводников.

Перейдём к анализу распределений плотности тока в сечении печатных колец при резонансе и сравним их с графиками плотности тока в сечении нерезонансного (замкнутого) кольца. В кольцах с узким и тем более очень узким проводником распределения плотности тока слабо неоднородны, поэтому проиллюстрируем резонансные особенности для широких и очень широких колец. Приведем графики модуля плотности тока в логарифмическом масштабе. Фаза указана в радианах. Трёхмерные графики распределения плотности тока более подходят для презентаций и неудобны для количественного анализа. Поэтому дадим срезы этих графиков по диагонали, так же, как это делалось ранее [1]. Обозначим на графике f_{0i} – резонансные частоты, которые мы задаем в качестве резонансных до моделирования. f_{0ri} – частоты, при которых фактически наблюдается резонанс, f_{0ri}^- и f_{0ri}^+ – нижняя и верхняя частоты, на которых уровень модуля тока снижается до уровня 0.7 от резонансного.

Для печатного кольца с широким проводником ($b_n/R = 0,5$) вверху Рис. 7 даны распределения плотности тока для трёх характерных частот ($f_{0r1} = 9,9733$ МГц, $f_{0r1}^- = 9,6467$ МГц, $f_{0r1}^+ = 10,2533$ МГц) в зависимости от расстояния до центра кольца ρ на выбранной частоте $f_{01} = 10$ МГц, причем $R_b \leq \rho \leq R$. Кроме того, внизу показана функция распределения тока для нерезонансного короткозамкнутого кольца. Первые три кривые лежат довольно близко друг к другу, причем верхняя относится к истинному резонансу, две другие ниже, что свидетельствует об уменьшении полного тока при стандартной отстройке. Нижний график для КЗ кольца смещен вниз приблизительно на два порядка, что соответствует возрастанию полного тока при резонансе.

Все распределения имеют глубокий провал приблизительно на 1,5...2,0 порядка в середине проводника. Для замкнутых (нерезонансных) колец, возбуждаемых внешним магнитным полем, экстремумы распределения тока на внешнем и внутреннем краях таковы, что ток на внешней кромке бывает почти на порядок более тока на внутренней кромке кольца. А при резонансе мы видим интересный эффект, когда эти экстремумы меняются местами. Объяснение следует из графиков поведения фаз в распределении плотности тока в сечении кольца (Рис. 8). Все четыре графика почти подобны по очертаниям и просто смещены относительно друг друга. Сопоставим кривую для нерезонансного кольца (нижняя кривая – КЗ) и кривую, соответствующую истинному резонансу на частоте f_{0r1} . В первом случае преобладает индуктивное сопротивление кольца ($\omega L_i \gg R_i$). При резонансе сопротивление цепи чисто активно и, следовательно, сдвиг фазы между этими случаями должен быть близок к $\pi/2$, что мы и видим на приведенных зависимостях. Разность фаз полного тока на резонансной частоте (f_{0r1}) и тока при стандартной расстройке вниз и вверх (f_{0r1}^- и f_{0r1}^+) должна составлять $\pm\pi/4$, что подтверждают графики на Рис. 8. Именно смещение фазовых распределений токов в сечении кольца приводит к изменению распределения токов при переходе от нерезонансного случая к резонансному, что в конечном итоге изменяет дисперсионные свойства печатных колец.

Аналогичные результаты для кольца с широким проводником были получены и для других указанных выше частот и качественно хорошо согласуются данными Рис. 7 и Рис. 8.

Обратимся к кольцам с очень широким проводником ($b_3/R = 31/32$), которые даже в нерезонансном случае имеют интересные особенности как в распределении плотности тока по сечению, так и в дисперсионных вариациях индуктивности [1]. На Рис. 9 даны распределения плотности в сечении кольца с очень широким проводником для различных частот вблизи резонанса при $f_{01} = 10$ МГц. На внутренней части проводника вплоть до $\rho \leq 0,3$ мм поведение функций распределения на характерных частотах хорошо совпадает с аналогичными распределениями для кольца с широким проводником (Рис. 7). Далее зазоры между графиками начинают изменяться, линии вопреки логике пересекаются и даже меняются местами. Впрочем, в пределах небольшого интервала. На внешней части проводника при $1,1 \text{ мм} \leq \rho \leq 1,152$ мм они сближаются и практически сливаются с графиком для нерезонансного кольца. Весьма любопытно, что в распределении тока для нерезонансного кольца отсутствует второй экстремум на внутренней кромке. Аналогичные особенности наблюдаются и для фазовых распределений плотности тока (Рис. 10). Они хорошо коррелируют с предыдущими результатами (Рис. 8) на внутренней половине проводника вплоть до $\rho \leq 0,6$ мм. Вероятнее всего эти аномалии связаны с большой неопределённостью, а точнее с отсутствием, явно выраженной резонансной кривой на этой частоте (Рис. 4).

Распределения амплитуд плотности тока в сечении печатного кольца с очень широким проводником (радиус отверстия равен толщине фольги) вблизи резонанса на частоте 100 МГц приведены на Рис. 11.

Качественно они такие же, как и на частоте 10 МГц (Рис. 9), но видны следующие тенденции. Область внутренней части проводника, где поведение функций распределения на характерных частотах хорошо совпадает с аналогичными распределениями для кольца с широким проводником (Рис. 7), увеличивается почти вдвое – вплоть до $\rho \leq 0,5$ мм. На полпорядка увеличивается экстремум плотности тока на внешней кромке кольца. Что касается фазовых распределений плотности тока

(Рис. 12), то область, где они хорошо совпадают с результатами для кольца с широким проводником, расширяется до $\rho \approx 0,9$ мм, это почти 0,75 всей ширины проводника.

Аналогичные результаты получены для функций распределения амплитуд и фаз плотности тока в сечении сверхшироких колец на более высоких частотах (3...5 ГГц), близких к границе применимости квазистатического приближения, они показывают все более слабое отличие от таких же зависимостей для широких колец.

Выводы

Ранее было установлено, что распределения плотности тока и их фазы в сечении печатных колец с широким и очень широким проводниками, возбуждаемыми внешним магнитным полем, в *нерезонансном* случае изменяются в широких пределах и имеют характерные особенности [1]. Эти распределения, за исключением колец с предельно большой шириной проводника, имеют два максимума в области его внешней и внутренней кромок с глубоким провалом между ними, причем внешний максимум распределения всегда больше внутреннего. Это приводит к сильной дисперсии, при которой индуктивность печатного кольца увеличивается с ростом частоты весьма значительно (при изменении частоты на три порядка рост величины индуктивности достигает 2...5-ти раз и более). Кроме того, обнаружены дисперсионные эффекты и при нагружении колец импедансами. В данной работе исследованы возможные дисперсионные эффекты для настроенных в резонанс колец, что является частным случаем емкостной нагрузки. Результаты численного моделирования позволяют сделать следующие выводы.

- 1) Функция распределения плотности тока в сечении печатного кольца *при резонансе* имеет два экстремума с глубоким провалом между ними. Один максимум всегда находится у внешней кромки кольца, а другой – у внутренней, при этом значение плотности тока, в отличие от нерезонансного случая [4], в максимуме на внешней кромке всегда ниже, чем значение плотности тока в максимуме на внутренней кромке.
- 2) На частотах ниже 10 МГц для колец радиусом около 1 мм резонанс практически не проявляется (добротность менее двух). Резонансные свойства проявляется все больше с ростом частоты и ширины проводника. Добротность резонансных колец с широким проводником, обусловленная потерями в нем, в частотном диапазоне 100...3000 МГц может достигать нескольких сотен.
- 3) Резонансная частота печатных колец смещается вниз по отношению к расчетной, которая определена величиной его индуктивности для замкнутого кольца. Это обусловлено перераспределением плотности тока в сечении печатного кольца при переходе в резонансный режим. Величина смещения может достигать 1% в низкочастотной части УКВ диапазона и уменьшается до 0.1...0.3% с ростом частоты и ширины проводника.

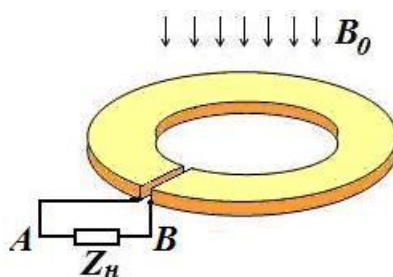


Рис. 1 Геометрия задачи

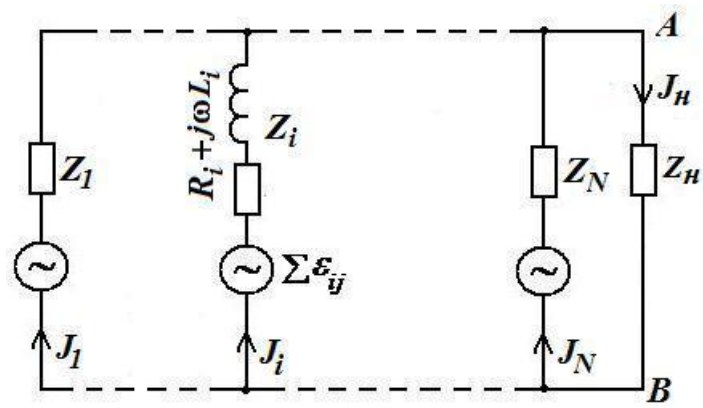


Рис. 2. Эквивалентная цепь

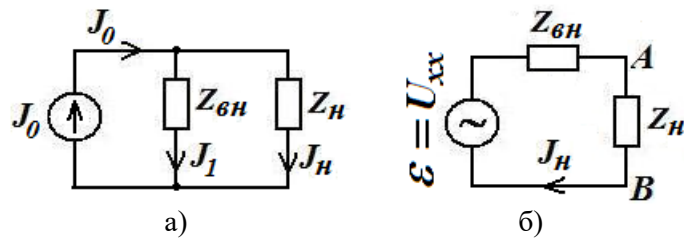


Рис. 3. Эквивалентные схемы нагруженного кольца

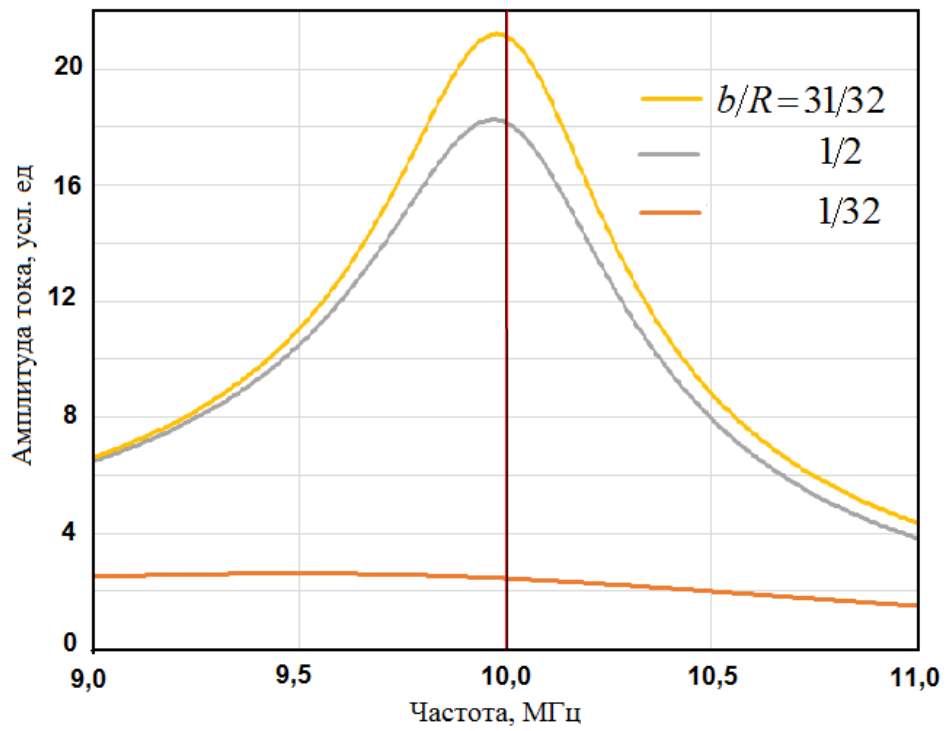


Рис.4. Частотные зависимости модуля тока в кольце около резонанса ($f_{01} = 10$ МГц) при различной ширине проводника

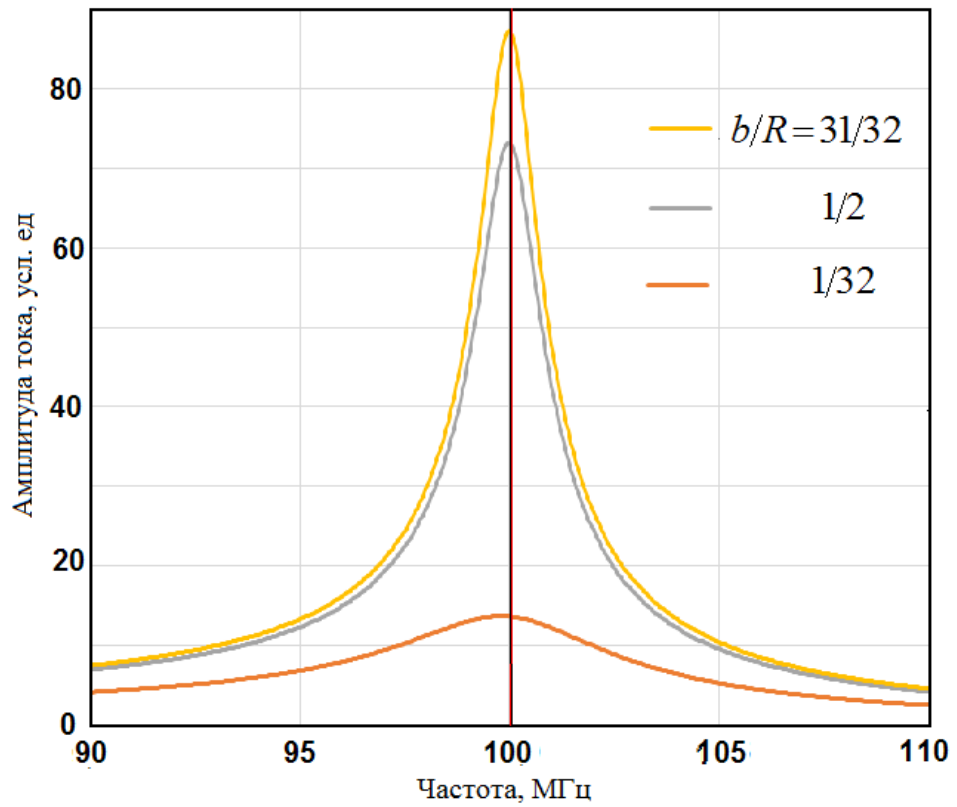


Рис.5. Частотные зависимости модуля тока в кольце около резонанса ($f_{02} = 100$ МГц) при различной ширине проводника

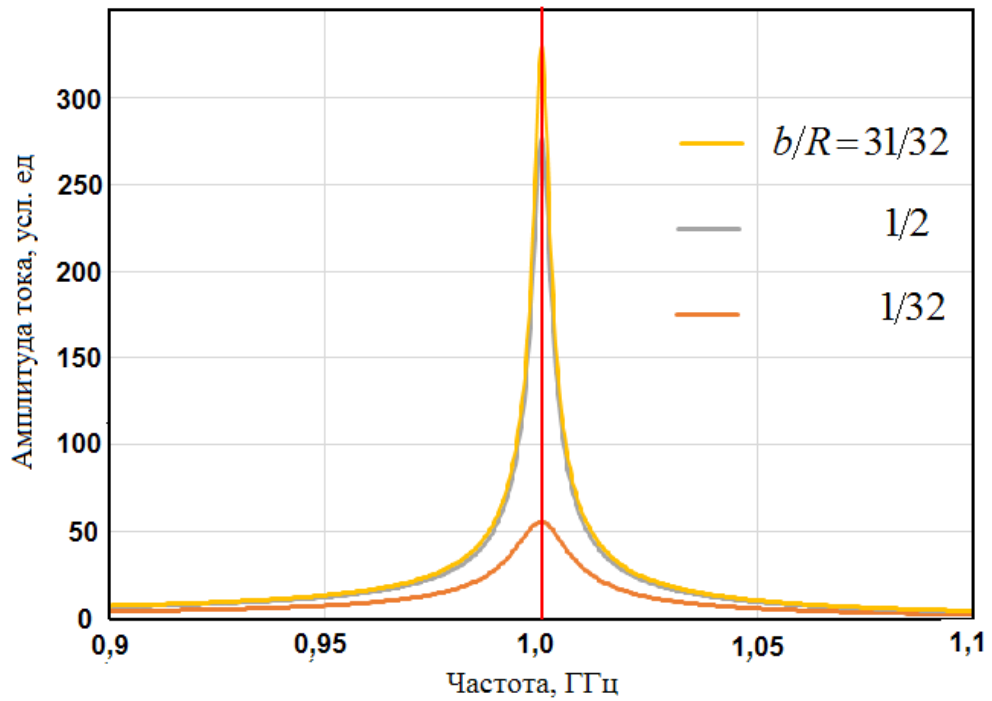


Рис.6. Частотные зависимости модуля тока в кольце около резонанса ($f_{03} = 1,0$ ГГц) при различной ширине проводника

f_{01} 10^7 Гц	R_b/a (b_n/R)	31 (1/32)	16 (16/32)	1 (31/32)
	C_1, Φ	$4,4 \cdot 10^{-8}$	$7,56 \cdot 10^{-8}$	$8,26 \cdot 10^{-8}$
	$L_1, \text{Гн}$	$5,76 \cdot 10^{-9}$	$3,35 \cdot 10^{-9}$	$3,07 \cdot 10^{-9}$
	$R_1, \text{Ом}$	0,09839	0,01261	0,01042
f_{02} 10^8 Гц	C_2, Φ	$4,32 \cdot 10^{-10}$	$7,08 \cdot 10^{-10}$	$7,71 \cdot 10^{-10}$
	$L_2, \text{Гн}$	$5,87 \cdot 10^{-9}$	$3,58 \cdot 10^{-9}$	$3,29 \cdot 10^{-9}$
	$R_2, \text{Ом}$	0,18182	0,03409	0,02848
f_{03} 10^9 Гц	C_3, Φ	$4,23 \cdot 10^{-12}$	$6,87 \cdot 10^{-12}$	$7,46 \cdot 10^{-12}$
	$L_3, \text{Гн}$	$5,99 \cdot 10^{-9}$	$3,69 \cdot 10^{-9}$	$3,4 \cdot 10^{-9}$
	$R_3, \text{Ом}$	0,46308	0,09357	0,07849

Таблица 1. Параметры колебательных контуров

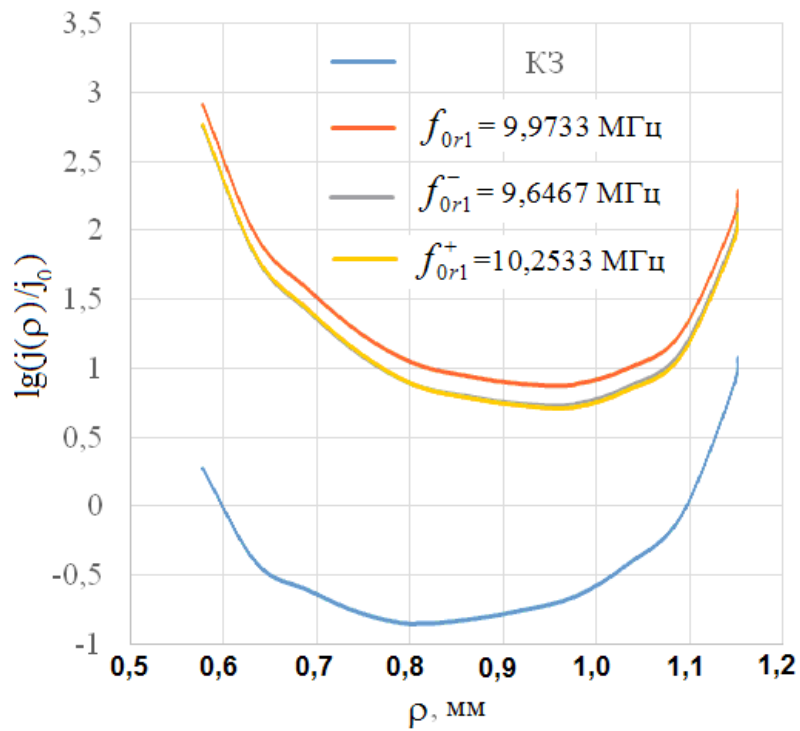


Рис.7. Распределение плотности тока в сечении кольца с широким проводником для характерных частот вблизи резонанса при $f_{01} = 10$ МГц

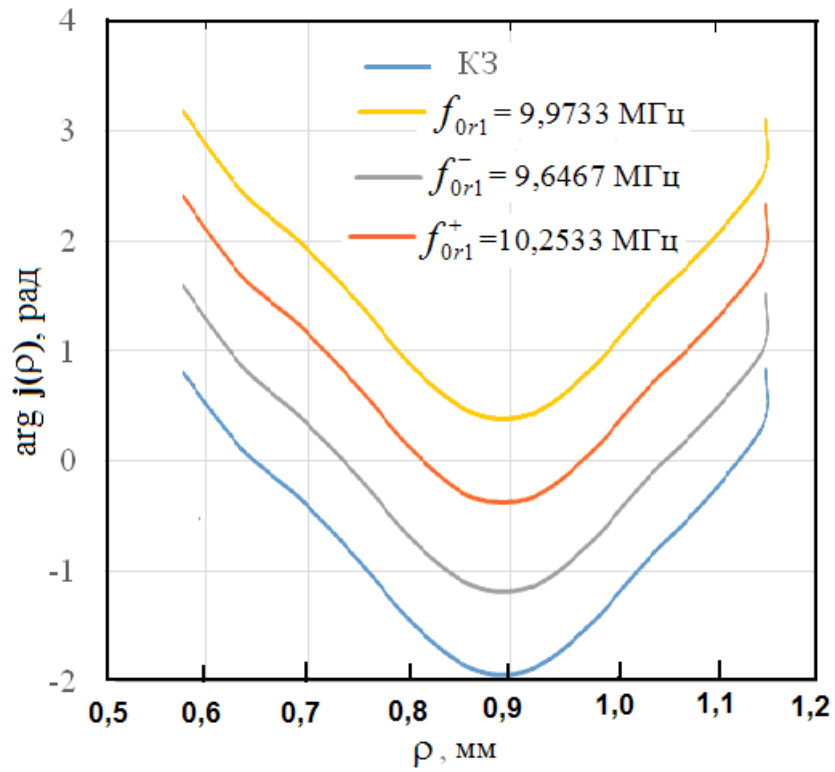


Рис. 8. Фазы плотности тока в сечении кольца с широким проводником для характерных частот вблизи резонанса при $f_{01} = 10$ МГц

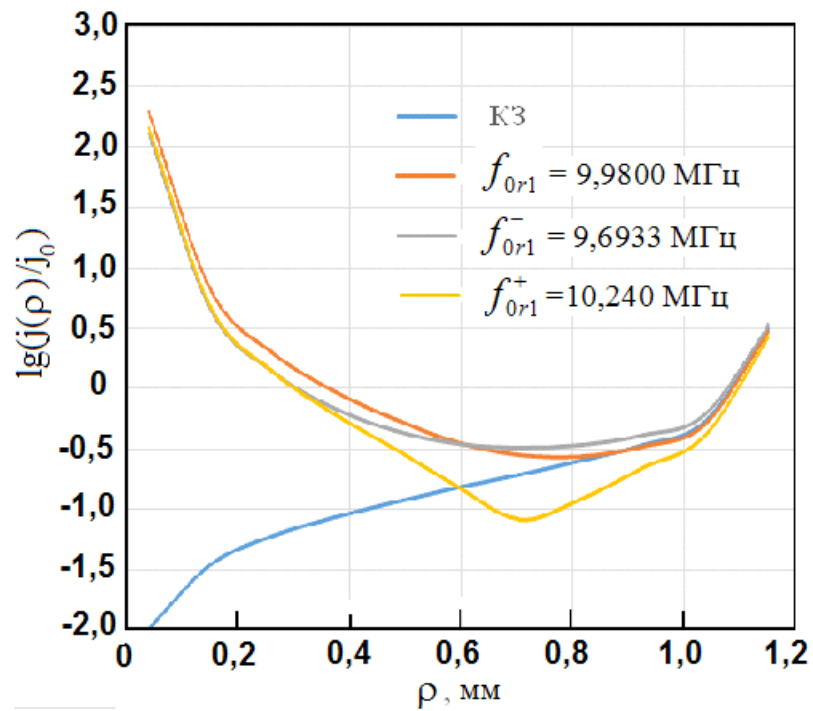


Рис.9. Распределение плотности тока в сечении кольца с очень широким проводником для характерных частот вблизи резонанса при $f_{01} = 10$ МГц

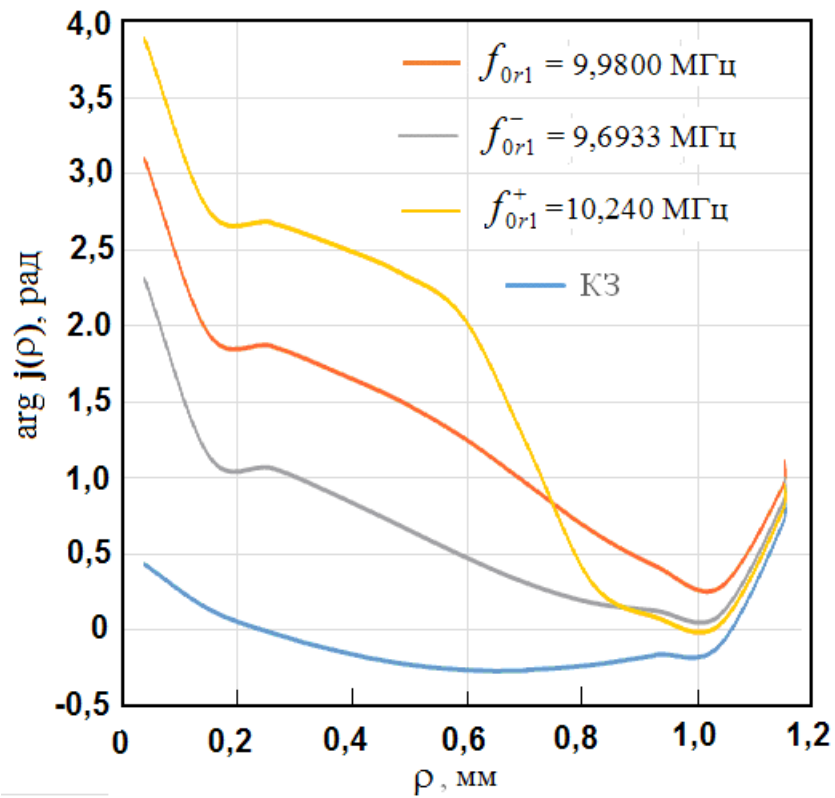


Рис. 10. Фазы плотности тока в сечении кольца с очень широким проводником для характерных частот вблизи резонанса при $f_{01} = 10$ МГц

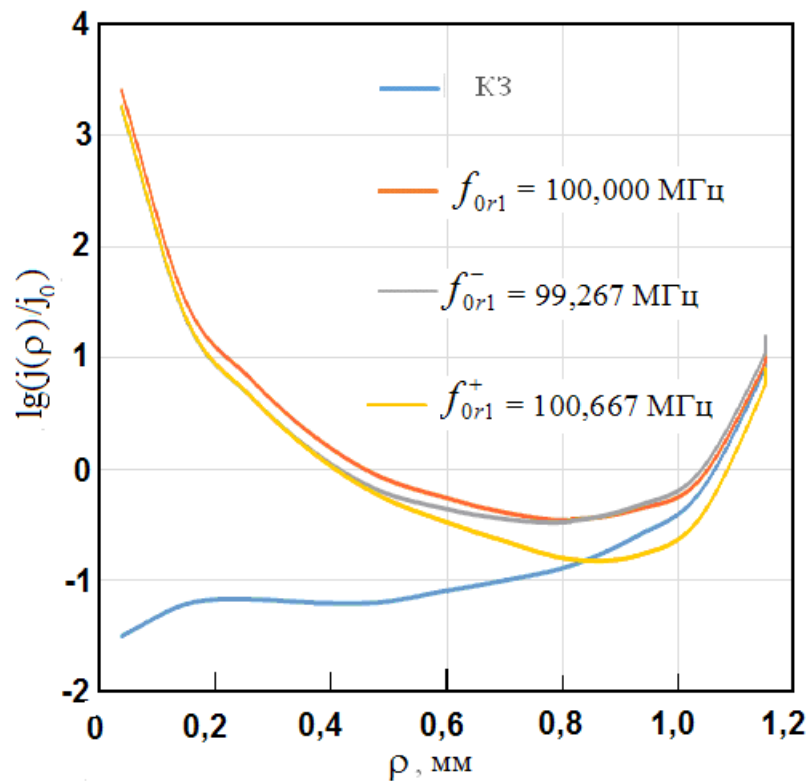


Рис. 11. Распределение плотности тока в сечении кольца с очень широким проводником для характерных частот вблизи резонанса при $f_{02} = 100$ МГц

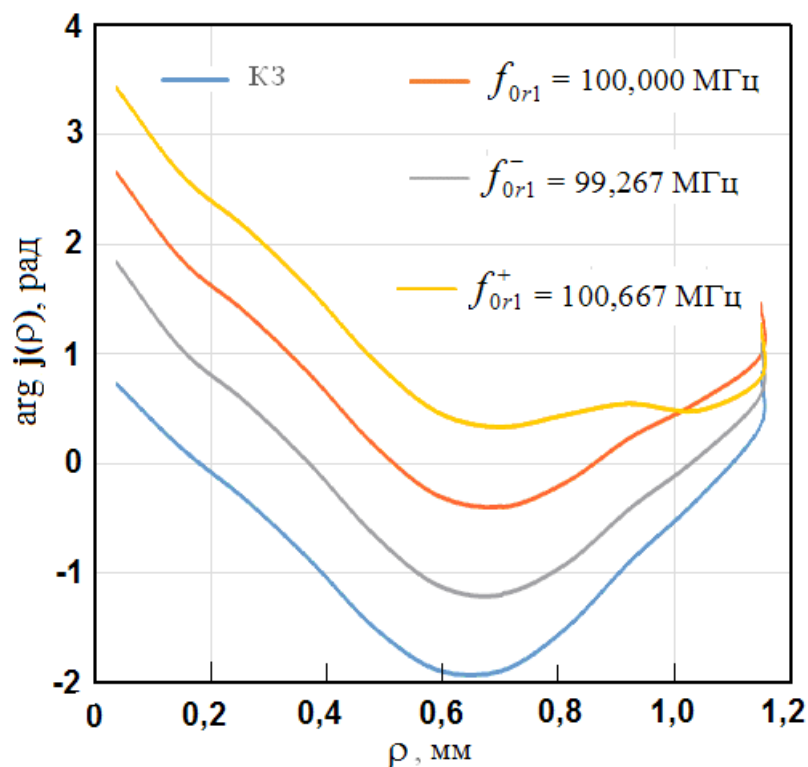


Рис. 12. Фазы плотности тока в сечении кольца с очень широким проводником для характерных частот вблизи резонанса при $f_{02} = 100$ МГц

Литература

1. Савельев А.В., Чубинский Н.П. Определение индуктивности плоских (печатных) колец при различных способах возбуждения. // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2015. N2. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/feb15/3/text.pdf>
2. Shelby R. A., Smith D. R., Schulz S. Experimental Verification of Negative Index of Refraction. –Science. – 2001. – V. 292. – P. 77-79
3. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. Пособие для вузов – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989 – 544 с.
4. Борзунова К.С., Савельев А.В., Чубинский Н.П. Физика взаимодействия электромагнитных волн с большими системами электрически малых диполей // Сб. докладов VIBсерос. Армандовских чтений. Муром, 29.05-02.06.2016. С. 426-438. ISSN 2304-0297 (CD-ROM)