

Коды над конечным алфавитом называются кодами с локальным восстановлением (ЛВ коды, англ. Locally Recoverable Codes, LRC), если каждый кодовый символ является функцией от определенного числа других кодовых символов, называемых восстанавливающим множеством (мощность данного множества обозначим через r) [1]. В настоящее время это одна из наиболее развивающихся областей теории кодирования в связи с возникающими приложениями к задаче распределенного и облачного хранения данных [2], [3], [4].

В приложении к распределенным высоконагруженным системам важным также является обеспечение высокой доступности данных при отказе одного или нескольких узлов. В этом случае, если каждый символ (мы представляем данные узла как символ некоторого большого алфавита) имеет одно восстанавливающее множество, то восстановление данных при отказе одного из узлов будет требовать значительного времени. Из-за чего вводятся ЛВ-коды с несколькими восстанавливающими множествами (t -ЛВ коды), в которых каждый символ имеет t непересекающихся восстанавливающих множеств [5]. При их использовании запросы на восстановление данных в отказавшем узле от нескольких пользователей будут параллельно обработаны с использованием нескольких непересекающихся восстанавливающих множеств, что значительно снизит суммарное время выполнения данной операции.

Однако в случае одновременных многочисленных отказов узлов распределенной системы, возникающих, например, вследствие отключения электроэнергии или проведения профилактических работ, необходимо переходить от локального к глобальному исправлению стираний, используя при этом различия между кодовыми словами. Поэтому необходимо обеспечить максимально возможное кодовое расстояние с сохранением при этом свойства локального восстановления. В случае нескольких восстанавливающих множеств для каждого кодового символа известны лишь грубые границы на кодовое расстояние [2], [6]. В связи с чем возникает задача улучшения данных границ. Мы приведем здесь лишь границу из [2]:

$$D \leq N - \sum_{i=0}^t \lfloor \frac{K-1}{r^i} \rfloor,$$

где N – длина кода, K – число информационных символов, D – кодовое расстояние.

В работе представлена новая граница на кодовое расстояние t -ЛВ кодов, полученная с использованием метода укорочения, предложенного Лицыным и Бен-Хэймом в [7] в приложении к кодам с малой плотностью проверок (МПП-кодам, англ. LDPC codes). Данная граница в случае линейного кода имеет следующий вид:

$$K \leq \min_{\substack{1+(r-1)s \leq K-1 \\ sr+1 \leq N}} \{1 + (r-1)s + K^*(N-1-sr, D)\},$$

где функция $K^*(\cdot, \cdot)$ – это верхняя граница на мощность (размерность) произвольного кода.

Если мы воспользуемся границей Синглтона, то получим следующую границу

$$D \leq N - (K - 1) - \lfloor \frac{K-2}{r-1} \rfloor,$$

являющуюся улучшением границ, представленных в работах [2], [6].

В данной работе мы привели только аналог границы Синглтона для ЛВ кодов с несколькими восстанавливаемыми множествами. Однако отметим, что с помощью метода укорочения легко получить и границы, зависящие от мощности алфавита (например, аналог границы Плоткина).

Работа С.А. Круглика выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00716).

Литература

1. *I. Tamo and A. Barg* A family of optimal locally recoverable codes // IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 60, no. 8, pp. 4661-4676, 2014.
2. *I. Tamo, A. Barg and A. Frolov* Bounds on the parameters of locally recoverable codes // IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 62, no. 6, pp. 3070-3083, 2016.
3. *A. S. Rawat, O. O. Koyluoglu and S. Vishwanath* Optimal locally repairable codes via rank-metric codes // Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory (ISIT), pp. 1819-1823, 2013.
4. *A. S. Rawat, D. S. Papailiopoulos, A. G. Dimakis, and S. Vishwanath* Locality and availability in distributed storage // Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory, Honolulu, HI, USA, Jun./Jul. 2014, pp. 681–685.
5. *I. Tamo, A. Barg* Bounds on locally recoverable codes with multiple recovering sets // Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory, Honolulu, HI, USA, Jun./Jul. 2014, pp. 691-695.
6. *P. Huang, E. Yaakobi, H. Uchikawa and P.H. Siegel* Linear locally repairable codes with availability // Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory, Hong Kong, Jun. 2015, pp. 1871-1875.
7. *Y. Ben-Haim and Simon Litsyn* Upper Bounds on the Rate of LDPC Codes as a Function of Minimum Distance // IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 52, no. 5, pp. 2092-2100, 2006.