

Применение статистической регуляризации Турчина к данным физического эксперимента

М. А. Нелюбина¹

¹Московский физико-технический институт (государственный университет)

Рассмотрен метод решения некорректно поставленной обратной задачи с помощью статистической регуляризации Турчина. В качестве примера некорректной задачи рассмотрим уравнение Фредгольма I рода.

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(x)dy = f(y)$$

В нашем случае конечных измерений решается некоторая алгебраизация этого уравнения: $f_m = K_{mn}\varphi_n$. Интегральный оператор $K(x, y)$, действуя на функцию (интересующий нас закон природы) в прямой задаче, сглаживает ее высокие гармоники, а оператор, действующий на экспериментальную функцию в обратной задаче, увеличивает амплитуду истинных гармоник, но при этом раскачивает и ложные гармоники стохастической природы, не имеющие отношения к искомому закону природы. В этом случае для регуляризации (удаления нежелательных решений) вводится априорная информация об исходной функции, например о ее гладкости. Тогда вместо уравнения Фредгольма решается задача минимизации функционала

$$r_\varepsilon(f^*, \hat{K}\varphi) + \alpha \int_a^b \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx = \min$$

Здесь r – мера уклонения, α – параметр регуляризации. Однако при классическом подходе параметр регуляризации оказывается неопределенным, и подбирается на практике вручную (метод регуляризации Тихонова [1]). Статистический же подход к восстановлению функций (статистическая регуляризация Турчина [2-5]) использует байесову стратегию, которая определяется как стратегия минимума средней потери полезности по апостериорной плотности вероятности $P(\vec{f}|\vec{\varphi})$. Минимизируется априорная информация (по Шеннону)

$$I[P(\vec{\varphi})] = \int \ln P(\vec{\varphi}) P(\vec{\varphi}) d\vec{\varphi} \rightarrow \min.$$

и делается усреднение по апостериорной плотности вероятности $P(\vec{f}|\vec{\varphi})$ и по априорной плотности. Таким образом, наилучшая оценка для $\vec{\varphi}$ будет:

$$\langle \varphi_i \rangle = \int \varphi_i P(\vec{\varphi} | \vec{f}) d\vec{\varphi}.$$

Реализована алгебризация уравнения с помощью полиномов Лежандра. Разработанный алгоритм тестировался на различных исходных функциях и интегральных ядрах. Также ведется работа по применению метода к реальным данным эксперимента Троицк ню-масс [6].

Литература

1. *А. Н. Тихонов* ДАН СССР, 1516 501 (1963),
2. *В. Ф Турчин*. ЖВМ и МФ 7, 1270 (1967).
3. *В. Ф Турчин*. ЖВМ и МФ 8, 230 (1968).
4. *В. Ф Турчин, В. З. Нозик*, Известия АН СССР, сер. “Физика атмосферы и океана” 5, 29 (1969),
5. *Л. С. Туровцева*, Решение некоторых обратных задач физики атмосферы методом статистической регуляризации (1973),
6. *D.N. Abdurashitov [et al.]*. Electron scattering on hydrogen and deuterium molecules at 14-25 keV by the "Troitsk nu-mass" experiment – arXiv:1603.04243 [physics.ins-det] (2016).