УДК 584.882, 52-17

Численное интегрирование уравнений геодезических в поле Шварцшильда в различных системах отсчета

В.Н. Строков[1], А.А. Попов[1], Ш.Г. Хлгатян[2]
[1] Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН
[2] Московский физико-технический институт (государственный университет)

Благодаря развитию методов радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами (VLBI) все более реальной выглядит возможность наблюдений ближайших окрестностей кандидатов в сверхмассивные черные дыры. Данная задача решается на сети телескопов Event Horizon Telescope [1], а также входит в список задач проекта “Миллиметрон” [2]. Для интерпретации подобных наблюдений используются теоретические модели так называемых теней черных дыр —- визуальных очертаний, которые приобретает расположенный рядом с черной дырой источник после прохождения света в гравитационном поле самой черной дыры. Такие тени моделируют численно путем прямого расчета множества ($\sim 10^9$) траекторий отдельных фотонов (см. статью [3] и ссылки в ней).

Эффективный потенциал, в котором движутся фотоны таков, что при определенных начальных условиях уравнения движения фотона (уравнения геодезических) представляют собой численно жесткую систему. А именно, в метрике черной дыры Шварцшильда существуют траектории, которые многократно “наматываются” вокруг черной дыры при почти неизменном радиусе [4], а затем либо уходят на бесконечность, либо падают в саму черную дыру. Чтобы правильно смоделировать такую траекторию, необходимо выбирать шаг, который позволит проследить медленное изменение радиуса. Обычно в таких случаях применяются специальные методы, в частности, методы Гира [5] с переменным шагом.

В данной работе нами был исследован вопрос: возможно ли записать метрику Шварцшильда в такой системе отсчета, в которой бы решаемая численно система уравнений стала нежесткой (так чтобы можно было бы применять более простые численные схемы с постоянным шагом)? Оказывается, к положительному ответу на этот вопрос приводят координаты Эддингтона—Финкельштейна, построенные на радиально падающих фотонах [4].

Итак, метрика Шварцшильда традиционно представляется в координатах кривизны $x^{\mu} = (t, r, \theta, \varphi)$, $\mu = 0,1,2,3$, в которых она имеет вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2\right), \tag{1}$$

где M —- масса черной дыры (мы используем систему единиц $G = c = 1$). Соответствующие уравнения геодезических выписываются стандартным образом [6] (точка означает производную по аффинному параметру):

$$\dot{x}^{\mu} = u^{\mu},$$

$$\dot{u}^{t} = \frac{2Mu^{t}u^{r}}{r(2M - r)},$$

$$\dot{u}^{r} = \frac{M(2M - r)(u^{t})^2}{r^3} - \frac{M(u^{r})^2}{r(2M - r)} - (2M - r)(u^{\theta})^2 - (2M - r)(u^{\varphi})^2 \sin^2 \theta,$$

$$\dot{u}^{\theta} = -\frac{2u^{r}u^{\theta}}{r} + (u^{\varphi})^2 \cos\theta \sin\theta,$$

$$\dot{u}^{\varphi} = -\frac{2\,\mathrm{u}^{\varphi}\,(\mathrm{u}^{r} + r\mathrm{u}^{\theta}\cot\theta)}{r}.$$

(2)

Рассмотрим теперь координаты Эддингтона—Финкельштейна $y^{\mu} = (V, r, \theta, \varphi)$, в которых t заменено на V с помощью преобразования $t = -r - 2M\ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) + V$. С физической точки зрения такая связь между t и r при постоянном V задает траекторию радиально падающего фотона. Приведем метрику и уравнения в этих координатах:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dV^2 - 2dVdr - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right),$$

(3)

$$\begin{gathered}
\dot{y}^{\mu} = w^{\mu}, \\
\dot{w}^{V} = r(w^{\theta})^2 - \frac{M(w^{V})^2}{r^2} + r(w^{\varphi})^2\sin^2\theta, \\
\dot{w}^{r} = (r - 2M)(w^{\theta})^2 + \frac{2Mw^{r}w^{V}}{r^2} + \frac{M(2M - r)(w^{V})^2}{r^3} - (2M - r)(w^{\varphi})^2\sin^2\theta, \\
\dot{w}^{\theta} = -\frac{2w^{r}w^{\theta}}{r} + (w^{\varphi})^2\cos\theta\sin\theta, \\
\dot{w}^{\varphi} = -\frac{2\,\mathrm{w}^{\varphi}\,(\mathrm{w}^{r} + rw^{\theta}\cot\theta)}{r}.
\end{gathered}$$

(4)

Далее, мы сравнили, насколько эффективными являются классические методы Рунге—Кутты 2-го и 4-го порядков для решения полученных систем ОДУ, и пришли к следующим результатам. Во-первых, на “наматывающихся” траекториях в системе (2) даже при малом шаге метод Рунге—Кутта 4-го порядка ведет к неустойчивости (“несохранению” интегралов движения). Во-вторых, за теми же траекториями в системе (4) удается проследить уже на уровне метода Рунге—Кутты 2-го порядка. Следовательно, уравнения движения в координатах Эддингтона—Финкельштейна допускают практически более экономное численное решение.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 16-32-00740 и 15-02-00554, а также научной школы НШ-6595.2016.2, финансируемой грантом Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ.

Литература

1. *Doeleman S.* Building an event horizon telescope: (sub)mm VLBI in the ALMA era // Proceedings of Science (10th EVN Symposium). — 2010. — Id. 53.
2. *Кардашёв Н.С.* [*и др.*] Обзор научных задач обсерватории Миллиметрон // Успехи Физических Наук. — 2014. — Т. 184, № 12. — С. 1319–1352.
3. *Dexter, J.* A public code for general relativistic, polarised radiative transfer around spinning black holes // Monthly Notices of Royal Academic Society. — 2016. — Vol. 462, Iss. 1. — P. 115–136.
4. *Новиков И.Д., Фролов В.П.* Физика черных дыр. — М.: Наука, 1986. — 328 с.
5. *Gear G.W.* Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations. — Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1971. — 52 p.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. — М.: Наука, 1988. — 509 с.