УДК 519.635.8

Решение уравнений Навье-Стокса с помощью нейронных сетей

В.И. Аврутский[1]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)

После появления доступной параллельной вычислительной техники в виде GPU практически в каждой области применения нейронных сетей произошел значительный прогресс. Это связано с тем, что задача обучения таких сетей отлично использует особенности GPU, и эффективная производительность при обучении практически совпадает с теоретически максимальной для данного оборудования (у современных GPU ~ 3 Гигафлопс), что значительно превышает возможности центральных процессоров. Такой скачок в производительности позволил работать с нейронными сетями большего размера, а так как возможности и точность нейронных сетей напрямую зависят от количества узлов (нейронов) в них, это, в конечном счете и привело к улучшению результатов во всех приложениях.

Нейронная сеть с математической точки зрения представляет собой гладкую вектор-функцию от нескольких переменных (здесь и далее у нас их будет две: координаты x и y), зависящую от некоторого количества действительных параметров (весовых коэффициентов W_i):

$$F(x, y, W_i) = \vec{S}$$

Примерное число параметров 10^3~10^6. От её выхода можно в аналитическом виде вычислить частную производную по любой переменной входа:

$$\frac{\partial}{\partial x}\vec{S}\,,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{S}\,,\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\vec{S}\,,\ \ldots$$

Следовательно, если выход нейронной сети трактовать как некоторое поле скоростей и давления:

$$\vec{S} = (u, v, \rho)$$

То из производных можно составить невязку например для уравнений Навье-Стокса:

$$E = \| (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} - \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p \|\,,\ \vec{u} = (u, v)$$

Которая, вообще говоря, будет зависеть от параметров W_i и конкретной точки (x, y). Тогда задача нахождения решения уравнений движения жидкости будет эквивалентна задаче нахождения параметров нейронной сети, при которых невязка во всех точках будет равна нулю. Также на значения нейронной сети накладываются граничные условия. Чтобы поставить задачу в численном виде, возьмем набор точек из двумерной области D, в которой мы ищем решение и посчитаем среднюю ошибку в следующем виде (суммирование проводится по всем N точкам):

$$\overline{E} = \frac{1}{N}\sum_{i,j} E_{ij}$$

Далее, выберем некоторые начальные веса W_0 и построим итерационную процедуру уменьшения ошибки (градиентный спуск):

$$\min_{W_i} \overline{E}: \quad W = W_0; \quad W_{n+1} = W_n - \gamma \frac{\partial \overline{E}}{\partial W_i}$$

Которую будем продолжать пока не получим приемлемую точность. Поскольку при вычислении производных мы не пользовались конечными разностями, ошибка дискретизации возникает только из-за отличия средней невязки, вычисленной поточечно, от её реального значения через интеграл. Аналогичные попытки решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных были описаны довольно давно [1,2], однако до появления GPU вычислительные ресурсы не позволяли решать громоздкие нелинейные задачи. Также все предыдущие работы не содержали универсального алгоритма обучения для сетей произвольного размера, а значит, авторы были некоторым образом ограничены сетями, для которых им удалось в явном виде написать алгоритм обучения (вычисления производных и градиента ошибки). Рассмотрена модельная задача о стационарном течении в каверне (Re=1200) и задача об уточнении асимптотического решения вязкого сжимаемого гиперзвукового потока [3].

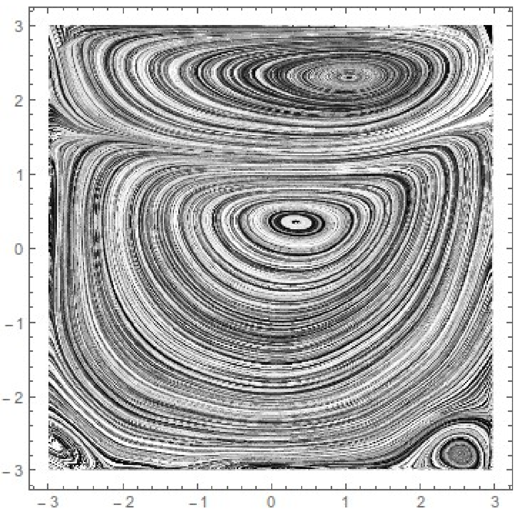

Рис. 1. Пример визуализации течения в каверне.

Литература

1. *I. E. Lagaris, A. Likas and D. I. Fotiadis* Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations," // *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 9, no. 5, pp. 987-1000, Sep 1998.
2. *Dissanayake, M. W. M. G., and N. Phan Thien.* Neural network based approximations for solving partial differential equations. // communications in Numerical Methods in Engineering 10.3 (1994): 195-201.
3. *Нейланд, В. Я.* [и др.] - Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2004 - 297с.