УДК 519.853

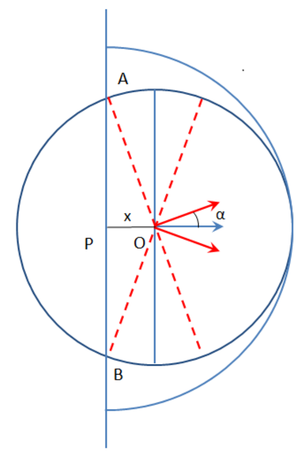
Решение оптимизационной задачи в двумерном пространстве Методом эллипсоидов с неточным оракулом.

Д.И. Грищенко - НИУ ВШЭ, ФКН.

Рассмотрим следующую ситуацию, в обычном методу эллипсоидов нам приходит не вектор градиента, а вектор с точностью до поворота на угол α.Как в таком случае поступить, чтобы метод сошелся и сошелся к верному значению.

Понятно, что просто оставить все как есть нельзя, даже при маленьком αмы можем отсечь решение после первой же итерации. Что же делать?

Рассмотрим круг на плоскости с центром в точке О. Так как любой эллипсоид с помощью аффинного преобразования можно перевести в круг, то мы можем провести рассуждения для круга.



Рассмотрим рисунок, синим тут выделен честный градиент, а две красные стрелки отвечают за максимальные отклонения получаемого нами от оракула градиента. В таком случае если мы проведем отсекающие гиперплоскости соответствующие красным стрелкам мы получим красны пунктирные прямые. Получается, что на следующем шаге нам нужно описывать эллипс не вокруг полуокружности, как того требует метод эллипсоидов, а вокруг того, что справа от прямой AB (мы можем совершенно безболезненно брать выпуклую оболочку того, что мы получаем на самом деле, так как от этого площадь минимального описанного эллипса не изменится).

Для того, чтобы оценить площадь описанного эллипса (вернее отношение его площади к площади исходного круга) воспользуемся двумя наблюдениями. Будем считать, что радиус исходного круга 1 (для поиска отношения нам не важен он).

Наблюдение 1. Полученная область покрывается полукругом с центром в P и радиусом 1+x.

Наблюдение 2. Площадь минимального эллипса описанного вокруг полукруга в $\beta^{-1} = \frac{\sqrt[4]{27}}{2}$ раз меньше площади исходного круга.

Заметим, что $x = sin\alpha$.

Получается, что площадь эллипса описанного вокруг данной области можно ограничить сверху $S_0 * (1 + \sin\alpha)^2\beta$. Откуда получается сразу ограничение на α,так как для того чтобы метод сходился площадь должна уменьшаться.

Вернемся к методу эллипсоидов. Известно, что для того, чтобы добиться точности νнеобходимо сделать $O\left(n^4 ln\left(\frac{\beta}{\nu}\right)\right)$ операций. Получается, что при описанных выше ограничениях на α мы можем добиться точности $O\left(n^4 ln\left(\frac{\beta(1+\sin\alpha)^2}{\nu}\right)\right)$ описанным выше способом за итераций, а так как n у нас равно 2, то прирост количества операций несущественен, поэтому если есть возможность сэкономить на вычислениях градиента, считая его приблизительно, например при помощи формулы Демьянова-Данскина, то это будет правильным решением.

Финальные замечания.

Необходимо заметить, что данный алгоритм работает только для небольших n. Основной причиной тому является факт, что “почти весь объем” n-мерного шара сконцентрирован близко к центральной части (если взять две параллельные гиперплоскости на расстоянии $\varepsilon \ll R$, то между ними будет почти весь объем).

Литература.

А. С. Немировский, Д. Б. Юдин, “Методы оптимизации, адаптивные к «существенной» размерности задачи”, *Автомат. и телемех.*, 1977, № 4, 75–87