УДК 533.697.4

Метод сопряженной оптимизации в задачах аэродинамического профилирования.

[1,2]Абрамов В.С., [1]Пьянков К.С.

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Центральный институт авиационого моторостроения им. Баранова

В задаче оптимизации существуют критерии оптимизации и варьируемые параметры, от которых они зависят. Связь между критериями и значениями варьируемых параметров описывается математической моделью. И цель задачи оптимизации – найти такой набор варьируемых параметров, при котором критерии оптимизации принимают экстремальные значения.

Методы решения задач оптимизации можно разделить на два вида: «прямые» и «обратные». К прямым отнесем методы наподобие градиентного и генетического. Например, в градиентном методе, вычисляются градиенты целевой функции в пространстве варьируемых параметров, чтобы найти направление наискорейшего изменения критериев. Дальше, в пространстве варьируемых параметров, делается шаг в полученном направлении и повторяется все с начала до тех пор, пока оптимум не будет достигнут. Для нахождения градиента требуется число обращений к математической модели пропорциональное числу варьируемых параметров. Поэтому в задачах высокой размерности такие методы неэффективны.

Возможной альтернативой им в задачах оптимального профилирования в рамках газовой динамики может служить метод сопряженной оптимизации. По сравнению с прямым градиентным методом, он имеет преимущество в количестве обращений к математической модели при расчете градиентов. Его называют сопряженным методом, потому как в нем нахождение градиента осуществляется через решение сопряженной к исследуемым уравнениям задачи. Сопряженный метод предполагает большую эффективность, так как время его подсчета не зависит от числа варьируемых параметров. Расчет одного градиента требует решение одной сопряженной задачи, сложность которой сравнима со сложностью расчета течения исходной математической модели.

На данный момент существуют два подхода для решения этой задачи: дискретный и непрерывный. Если сопряженные уравнения получаются сразу из уравнений течения и только потом переводятся в дискретный вид, то такой подход называют непрерывной сопряженной задачей, и наоборот если они получаются напрямую из уравнений, представленных в дискретном виде, то его называют дискретным. В этой работе был использован непрерывный метод.

В качестве модели взята система уравнений Эйлера.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+L_1\equiv\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0, \qquad \text{или}:\quad \frac{\partial U_i}{\partial t}+L_i\equiv\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial F_i}{\partial x}+\frac{\partial G_i}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+L_2\equiv\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2+p)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}=0, \qquad U_i=\begin{bmatrix}\rho & \rho u & \rho v & E\end{bmatrix}^T$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+L_3\equiv\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v^2+p)}{\partial y}=0, \qquad F_i=\begin{bmatrix}\rho u & \rho u^2+p & \rho uv & \rho uH\end{bmatrix}^T$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}+L_4\equiv\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uH)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vH)}{\partial y}=0. \qquad G_i=\begin{bmatrix}\rho v & \rho uv & \rho v^2+p & \rho vH\end{bmatrix}^T$$

$$E+p=\rho H,\quad H=\frac{q^2}{2}+h,\quad q^2=u^2+v^2,\quad h=\frac{c^2}{\gamma-1}=\frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho}$$

Соответствующая ей сопряженная задача:

$$(\gamma-3)V\frac{\partial\Psi_2}{\partial x'}+(\gamma-1)V\frac{\partial\Psi_3}{\partial y'}+[(\gamma-2)V^2-2h]\frac{\partial\Psi_4}{\partial x'}=0,$$

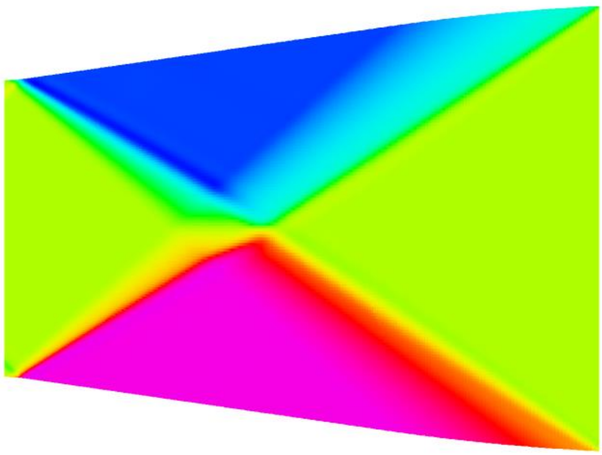
$$2\frac{\partial\Psi_1}{\partial y'}+2V\frac{\partial\Psi_2}{\partial y'}+2V\frac{\partial\Psi_3}{\partial x'}+(V^2+2h)\frac{\partial\Psi_4}{\partial y'}=0,$$

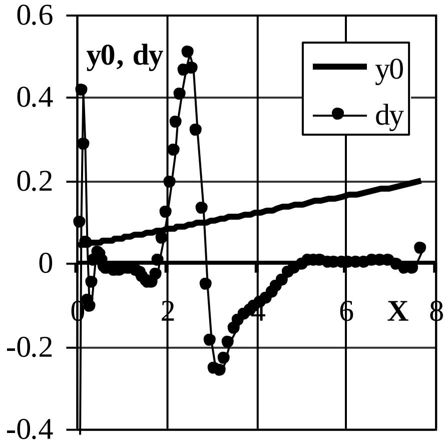
$$2\frac{\partial\Psi_1}{\partial x'}-(V^2+2h)\frac{\partial\Psi_4}{\partial x'}=0,$$

$$2\frac{\partial\Psi_1}{\partial x'}+2V\frac{\partial\Psi_2}{\partial x'}+V^2\frac{\partial\Psi_4}{\partial x'}=0.$$

Последняя система получается после некоторых преобразований, и написана в другой системе координат, иначе она слишком громоздка.

Ниже представлен пример расчета сопла конической формы (слева на рисунке изображено поле ψ_3 dy – положение границы). В задаче оптимизировалась тяга, т.е. интеграл давления по стенке сопла. Варьируется форма ломаной, которая задает образующую сопла, а варьируемыми параметрами являются y координаты ее точек. Множество точек dy в совокупности представляет собой градиент, который в данном случае удобно представить в виде графика. Расчет был сделан не на сетке не адаптированной к структуре течения для данной конфигурации и только с первым порядком аппроксимации (в силу возможностей программы на момент расчета).





Из графика видно, что для достижения оптимума, решение предлагает сдвинуть правый участок контура вниз, что верно. Но в тоже время можно увидеть большую нестабильность градиента в начале и середине сопла. Мы считаем, что это связанно с недостаточной точностью счета.

Поэтому дальнейшие усилия были направлены на устранения этих недостатков. В ближайшем будущем планируется провести расчет на более качественной сетке (адаптированной под особенности течения) с более высоким порядком аппроксимации.

Работа была поддержана грантом РФФИ 14-01-00146

Литература

1. 1.*Antony Jameson and Sangho Kim* Reduction of the Adjoint Gradient Formula in the Continuous Limit Stanford University, Stanford, CA 94305, U.S.A
2. 2.*Годунов С.К., и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики Наука. Москва. 1976