УДК 512.541

Рефлективные гиперболические решетки

Н.В. Богачев [1,2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)

[2]Московский государственный университет им М.В. Ломоносова

Гиперболической решеткой L ранга $n+1$ называется свободная абелева группа, снабженная скалярным умножением сигнатуры $(n,1)$. Тогда

$$V = L \otimes \mathbb{R} = \mathbb{E}^{n,1}$$

есть пространство Минковского. В качестве n-мерного пространства Лобачевского $\mathbb{L}^n$ будем рассматривать одну из связных компонент гиперболоида, заданного уравнением

$$(x,x) = -1.$$

В этом случае группой движений пространства Лобачевского является подгруппа $O'(V)$ индекса 2 в псевдоортогональной группе $O(V)$, состоящая из преобразований, переводящих каждую из связных компонент гиперболоида в себя. Плоскостями в векторной модели пространства $\mathbb{L}^n$ являются непустые пересечения гиперболоида с подпространствами пространства V.

Примитивный вектор e квадратичной решетки L называется k-корнем, если

$$(e,e) = k, 2(e,x) \in kZ$$

для всех $x \in L$. Всякий k-корень e определяет ортогональное k-отражение в пространстве Минковского:

$$R_e : x \to x - 2(e,x)e / k.$$

Оно сохраняет решетку L и является отражением относительно гиперплоскости

$$H_e = x \in \mathbb{L}^n : (x,e) = 0$$

пространства $\mathbb{L}^n$.

Известно, что группа

$$O'(L) = O(L) \cap O'(V)$$

дискретно действует на пространстве $\mathbb{L}^n$ и ее фундаментальный многогранник имеет конечный объем. Решетка L называется рефлективной (соотв., 1.2-рефлективной), если подгруппа $O_r(L)$, порожденная всеми отражениями, содержащимися в группе $O'(L)$ (соотв., подгруппа $O_r^{1,2}(L)$, порожденная всеми 1- и 2-отражениями) имеет конечный индекс в $O(L)$. Решетка L рефлективна (или 1.2-рефлективна), если фундаментальный многогранник группы $O_r(L)$ (или $O_r^{1,2}(L)$) имеет конечный объем.

Имеется алгоритм, позволяющий для любой конкретной решетки L последовательно находить все грани многогранника M и определить, конечно ли их число ([2], [3]).

Ненулевой вектор $x \in L$ называется изотропным, если $(x,x) = 0$. Гиперболическая решетка L называется изотропной, если она содержит хотя бы один изотропный вектор x, в противном случае она называется анизотропной.

Известно, что рефлективных гиперболических решеток не существует при ранге $n+1 > 22$ ([5]). Известны примеры рефлективных решеток при всех $n < 21$ за исключением случая $n = 20$. Э.Б. Винберг ([4]) классифицировал все 2-рефлективные гиперболические решетки ранга 4. В.В. Никулин ([6], [8]) классифицировал все 2-рефлективные гиперболические решетки ранга, не равного 4, а затем в работе [9] им были найдены все максимальные рефлективные гиперболические решетки ранга 3. Впоследствии Д. Оллкок в своей работе [1] классифицировал вообще все рефлективные решетки ранга 3. Также в работе [10] Р. Шарлау и К. Вальхорн привели гипотетический список максимальных групп вида $O_r(L)$, где L - рефлективная изотропная гиперболическая решетка ранга 4. Докладчиком найдены все 1.2-рефлективные максимальные анизотропные гиперболические решетки ранга 4. Результат доступен в виде препринта.

Литература

1. *D. Allock.* The reflective Lorentzian lattices of rank 3 // Mem. Amer. Math. Soc. 2012. V. 220 (1033). Pp. 1-126.
2. *Э.Б. Винберг.* О группах единиц некоторых квадратичных форм // Мат. сб. 1972. Т. 87. С. 18-36.
3. *E.B. Vinberg.* Some arithmetical discrete groups in Lobachevskii spaces // Oxford: University Press. 1975. Pp. 323-348.
4. *Э.Б. Винберг.* Классификация 2-рефлективных гиперболических решеток ранга 4 // Труды ММО. 2007. Т. 68. С. 44-76.
5. *F. Esselman.* U ber die maximale Dimension von Lorentz-Gittern mit coendlicher Spiegelungsgruppe // Journal of number theory. 1996. V. 61. Pp. 103-144.
6. *В.В. Никулин.* О факторгруппах групп автоморфизмов гиперболическом форм по подгруппам, порожденным 2-отражениями. Алгебро-геометрические приложения // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. М.: ВИНИТИ. 1981. Т. 18. С. 3-14.
7. *В.В. Никулин.* О классификации арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 113-142.
8. *В.В. Никулин.* Поверхности типа К3 с конечной группой автоморфизмов и группой Пикара ранга 3 // Тр. МИАН. 1984. Т. 65. С. 119-142.
9. *В.В. Никулин.* О классификации гиперболических систем корней ранга 3 // Тр. МИАН. 2000. Т. 230. С. 1-255.
10. *R. Scharlau, C. Walhorn.* Integral lattices and hyperbolic reflection groups // Asterisque. 1992. V. 209. Pp. 279-291.