

Развитие метода крупных частиц для трёхмерных структурированных неортогональных сеток

И.В. Лаптев², Д.В. Продан^{1,2}

¹Московский физико-технический институт

²ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша»

Методы численного моделирования газодинамики в общем случае могут быть поделены на сквозные методы и методы с выделением характерных особенностей. Преимуществом первых является простота реализации и, собственно, проведения расчёта с минимальной необходимостью вмешательства оператора.

Помимо возможности прямого разрешения разрывов метод может быть оценён по способности разрешать сложный поток, с наличием участков разных характерных масштабов, скоростей и энергий.

Семейство методов расщепления задачи на составляющие происходящих физических процессов зарекомендовал себя как метод моделирования обладающий высокой степенью универсальности.

В частности, в середине XX века был предложен метод частиц в ячейках Харлоу [1], с разделением итерации на эйлеров и лагранжев этап, недостатком которого являлась дискретное приближение потоков через границы ячеек. Метод был развит Белоцерковским и Давыдовым в метод крупных частиц для двумерной декартовой сетки [2].

Идея этого метода снова стала актуальной с необходимостью моделировать трёхмерные сложные течения без привлечения больших вычислительных мощностей и значительных трат времени. Однако использование трёхмерных декартовых сеток представляется неудобным с точки зрения разрешения границ сложных областей. Удобнее пользоваться сетками, в которых внешние ячейки мостят граничную поверхность своими гранями. Поэтому в недавнем времени в ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша» метод Белоцерковского был развит до метода расчёта на трёхмерной неортогональной в общем случае сетке для шестигранных расчётных областей (под словом «грань» в данном случае подразумевается односвязная внешняя поверхность с определённым граничным условием) и реализован для течений невязкого сжимаемого флюида. Т.е. метод представляет собой численное решение уравнений Эйлера с замыканием уравнением состояния идеального газа.

Как описывалось в [2] для выполнения граничных условий на каждой грани внешней ячейки, обращённой наружу, строится фиктивная ячейка, параметры в которой задаются таким образом, чтоб интерполяция на реальную границу расчётной области удовлетворяла заданным уравнениям. (Условия нулевой компоненты скорости, нормальной к стенке, нулевых градиентов давления, энергий и плотностей на входе и выходе и т.д.)

Опишем подробнее алгоритм итерации расчёта:

I.a. Эйлеров этап

На данном этапе контрольные объёмы представляются «замороженными», т.е. масса не перетекает через их границы, а рассчитываются только изменения их скоростей и энергий соответственно давлениям на гранях. Тогда для каждой ячейки уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}^n &= \mathbf{u}^n - dt \left(\sum_{i=1}^6 S_i P_i^n \mathbf{n}_i \right) (V \rho^n)^{-1}, \\ \bar{E}^n &= E^n - dt \left(\sum_{i=1}^6 S_i P_i^n \mathbf{u}_i^n \mathbf{n}_i \right) (V \rho^n)^{-1},\end{aligned}$$

где n – номер шага по времени, V – объём ячейки, i – номер грани ячейки, \mathbf{n} – единичный вектор нормали грани, направленный от ячейки, S – площадь грани. Значения с индексом i соответствуют значениям на гранях, получаемых интерполяцией значений из центров ячеек.

I.б. Применение граничных условий для $\bar{\mathbf{u}}$ и \bar{E} в фиктивных ячейках.

II.a. Лагранжев этап

На данном этапе рассчитываются потоки через границы ячеек при возврате к эйлеровой сетке. Для каждой ячейки поток через i находится по формуле:

$$\begin{cases} dM_i^n = \rho^n \bar{\mathbf{u}}_i^n \mathbf{n}_i S_i, & \text{при } \bar{\mathbf{u}}_i^n \mathbf{n}_i \geq 0 \\ dM_i^n = \rho_i^{n*} \bar{\mathbf{u}}_i^n \mathbf{n}_i S_i, & \text{при } \bar{\mathbf{u}}_i^n \mathbf{n}_i \geq 0' \end{cases}$$

где ρ_i^{n*} - плотность в ячейке, соседней рассматриваемой по i грани.

Выразим итоговые параметры ячейки. Для этого введём вспомогательную функцию

$$D_i^n = f(\bar{\mathbf{u}}_i^n \mathbf{n}_i),$$

следующего вида: $\begin{cases} D_i(x) = 0, & \text{при } x \geq 0 \\ D_i(x) = 1, & \text{при } x < 0 \end{cases}$ Тогда для каждой ячейки:

$$\begin{aligned} \rho^{n+1} &= \rho^n - dt \left(\sum_{i=1}^6 dM_i^n \right) V^{-1}, \\ \mathbf{u}^{n+1} &= -dt \frac{\left(\sum_{i=1}^6 D_i^n dM_i^n \bar{\mathbf{u}}_i^{n*} - \bar{\mathbf{u}}^n \left(\frac{\rho^n V}{dt} - \sum_{i=1}^6 (1 - D_i^n) dM_i^n \right) \right)}{V \rho^n}, \\ E^{n+1} &= -dt \frac{\left(\sum_{i=1}^6 D_i^n dM_i^n E_i^{n*} - E^n \left(\frac{\rho^n V}{dt} - \sum_{i=1}^6 (1 - D_i^n) dM_i^n \right) \right)}{V \rho^n}, \\ p^{n+1} &= \left(E^{n+1} - \frac{\mathbf{u}^{n+1}{}^2}{2} \right) \rho^{n+1} (\kappa - 1), \end{aligned}$$

где параметры, обозначенные * отвечают значениям в центрах соседних по i грани ячеек.

П.б. Расчёт параметров в фиктивных ячейках для удовлетворения заданным граничным условиям.

Описанный метод, в общем, не требует от сетки структурированности и без труда может быть преобразован для вычислений на ячейках, количество граней которых не равно шести. Однако реализация уравнений в программном коде для структурированной сетки значительно проще. В противном случае надо решать задачу адресации к параметрам соседних ячеек что приводит к усложнению кода.

Представленный метод позволит производить трёхмерное моделирование сверхзвукового обтекание воздухозаборников прямооточных воздушно-реактивных двигателей, летательных аппаратов и отдельных деталей их конструкции.

На рис. 1 представлен скачок уплотнения, возникающий вокруг острого конуса при числе Маха набегающего потока $M = 3,5$.

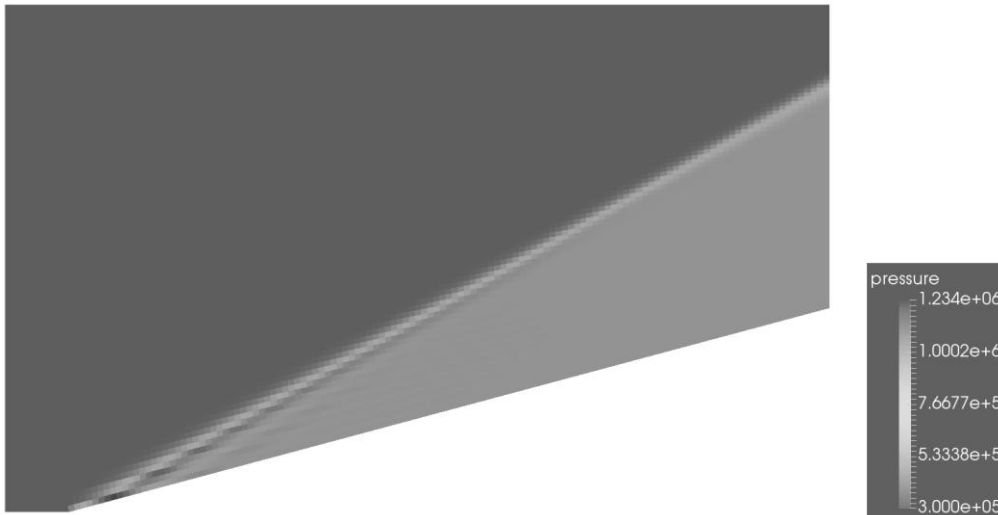


Рис. 1. Обтекание клина потоком с числом Маха $M=3,5$.

Литература

1. *Evans M.W., Harlow F.H.* The particle-in-cell method for hydrodynamic calculations. – Los Alamos Scientific Lab., Rept. №LA-2139. – Los Alamos, 1957.
2. *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1982. 393 с.