УДК 519.21

Об оптимальном времени продажи актива при наличии инсайдерской информации

А.В. Куликов[1]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)

Одной из важнейших задач теории случайных процессов и финансовой математики является задача об оптимальной остановке. Классическая постановка и ряд классических задач теории случайных процессов были введены и рассмотрены в работе [3].

Одна из классических задач финансовой математики является задача оптимальной продажи имеющегося актива. Пусть $(\Omega, F, (F_t)_{t\leq T}, P)$ – фильтрованное вероятностное пространство, S_t – согласованный с фильтрацией случайный процесс, означающий цену актива. Тогда задачей оптимальной продажи в пределах интервала [0,T] будет являться решение следующей задачи $sup_{\tau\leq T} EX_\tau$.

В случае рассмотрения в качестве случайного процесса броуновского движения относительно своей естественной фильтрации $EX_\tau = 0$, что означает, что абсолютно всё равно, в какой момент реализовывать актив. Если же $\tilde{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t, B_1)_{t\leq 1}$, то данная задача означает наличие инсайдерской информации о цене базового актива в последний момент времени. Решение данной задачи эквивалентно нахождению супремума броуновского моста. Данная задача была рассмотрена в работе [1] с использованием подхода, рассмотренного А.Н. Ширяевым и Г. Пешкиром в работе [2].

В данной работе мы рассматриваем другой подход к решению данной задачи с использованием приближения броуновского движения с помощью случайного блуждания. Рассмотрим случайное блуждание $(S_n)_{n\leq N}$. Тогда рассмотрим функцию $m(n,k) = \sup_{\tau\leq \mathrm{T}} E(S_\tau | S_n = 2k - n)$. Тогда можно заметить, что

$$m(n,0) = 0; m(n,n) = n; m(n,k) = \max\left(0, \frac{2k}{n} - 1 + \frac{k}{n} m(n-1,k-1) + \frac{n-k}{n} m(n-1,k)\right). (1)$$

Разрешая данное уравнение и используя приближение броуновского движения случайным блужданием, мы получаем, что

$$sup_{\tau\leq 1} E(B_\tau | B_1 = \alpha) = \lim_{n\to\infty} m(n, \left[\frac{n}{2} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{n}\right])/\sqrt{n}$$

Также мы рассматриваем задачу об инсайдерской информации, что по результатам всего движения случайное блуждание не выйдет за границы интервала, т.е. рассматриваем функцию

$m(n,k_1,k_2) = \sup_{\tau \leq \mathrm{T}} E(S_\tau | 2k_1 - n \leq S_n \leq 2k_2 - n)$. Тогда можно получить соотношение

$$m(n,0,k) = 0; m(n,k_1,k_2) = \max\left(0, \frac{2p(n,k_1,k_2)}{n} - 1 + \frac{p(n,k_1,k_2)}{n} m(n-1,k_1-1,k_2-1) + (1-p(n,k_1,k_2)) m(n-1,k_1,k_2)\right).$$

Разрешая данное уравнения и используя приближение броуновского движения случайным блужданием, мы получаем, что

$$sup_{\tau \leq 1} E(B_\tau | \beta \leq B_1 \leq \alpha) = \lim_{n \to \infty} m(n, \left[\frac{n}{2} + \frac{\beta}{2}\sqrt{n}\right], \left[\frac{n}{2} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{n}\right]) / \sqrt{n} \qquad (2)$$

В работе рассмотрены способы нахождения $p(n,k_1,k_2)$ и свойства функции $m(n,k_1,k_2)$, а также найдено численное решение задачи (2) о максимизации средней стоимости проданного актива, если мы знаем, что в пределах заданного промежутка времени цена актива не выйдет за рамки рассмотренного интервала цен.

Литература

1. Ekstrom E., Wanntrop H. Optimal stopping of Brownian bridge. Journal Appl. Prob., 2009, **46**, p. 170-180.

2. Peskir G., Shiryaev A.N. Optimal stopping and free-boundary problems. Lectures in Mathematics ETH Zurich. Birkhauser Verlag, Basel, 2006.

3. Shepp L.A. Explicit solutions for some problems of optimal stopping. Ann. Math. Statist, 1969, **40**, p. 993-1010.