УДК 338.2

Сравнение доходности инвестиционных проектов при различных схемах инвестирования

А. В. Рассоха
Московский физико-технический институт (государственный университет)

1 Введение

В теории корпоративных финансов часто возникает задача оптимизации инвестиционной деятельности компании, а в рамках этой задачи естественным образом возникает вопрос о доходности инвестиционных проектов. В настоящий момент существует два основных подхода к этому вопросу: оценивание проектов по их NPV (net present value), чистой приведённой стоимости денежных потоков проекта, либо по их IRR (internal rate of return), дисконтной ставке, при которой NPV проекта обращается в 0 (IRR проекта суть корни его инвестиционного полинома). Экономисты, являющиеся сторонниками оценки проектов по их NPV, ссылались на то, что NPV является естественным и однозначным критерием, лекго вычислим, в то время как IRR проекта в общем случае может определяться неоднозначно (так как корней у инвестиционного полинома может быть несколько). Сторонники IRR, в свою очередь, критиковали показатель NPV на основании того, что соотношение NPV различных проектов сильно зависит от принятой ставки дисконта, а её величина (то есть временна́я стоимость денег) определяется неоднозначно.

Д. Г. Кантор и С. А. Липман в своей работе [1] предложили постановку задачи, для которой им удалось решить проблему множественности IRR. Их модель представляет собой динамичекую систему, в которой предприниматель может выбирать интенсивность реализции инвестиционного проекта в различные моменты времени. Цель инвестора — максимизировать терминальный доход. В этой модели существуют некоторые ограничения:

1) Отсутствует возможность займа;

2) Заранее определён инвестиционный горизонт;

3) К завершению заданного периода инвестор должен быть свободен от всех обязательств.

Для этой модели Д. Г. Кантор и С. А. Липман получили асимптотическую оценку на темп роста капитала. Эта оценка оказалась равна величине, обратной к максимальному положительному корню инвестиционного полинома (то есть полинома, коэффициенты которого равны компонентам вектора, характеризующего инвестиционный проект). Переменную в данном полиноме логично интерпретировать как ставку дисконта, тогда этот многочлен является функцией зависимости NPV от ставки дисконта. Таким образом, оценка на темп роста проекта, полученная в [1], показывает, что в качестве IRR надо брать максимальный корень инвестиционного полинома. Интерпретация остальных положительных корней инвестиционного полинома получена Э. Л. Пресманом и И. М. Сониным в [7]. Ими было показано, что величины, обратные к отличным от максимальной ставкам дисконта, обнуляющим NPV, являются асимптотическими оценками на скорость роста капитала инвестора в том случае, когда инвестиционная деятельность является финансовой пирамидой (то есть такая деятельность приводит инвестора к ситуации, из которой он не сможет выйти, не нарушив ранее данные обязаельства по проектам). Развивая свои идеи, Д. Г. Кантор и С. А. Липман в [2] предложили подход к оценке пула инвесиционных проектов.

Все вышеописанные результаты были выведены для случая стационарного рынка инвестиций, то есть считалось, что любой проект доступен для запуска с любой интенсивностью в любой момент времени. Именно благодаря этому становилась возможной реализация финансовых пирамид (или, иначе, финановых пузырей). Однако в условиях современной экономики требование стационарности рынка инвестиций является излишне ограничительным и не очень реалистичным. Интересна для исследования ситуация, когда из-за внешних событий в экономике (например, финансового кризиса) проект оказывается закрыт для инвестирования (либо, в случае именно кризиса, вложение денег в проект может оказаться слишком рискованным), и инвестору остаётся лишь отвечать по ранее взятым на себя обязательствам. В [4] была предложена модель, в которой фигурирует субъективная, с точки зрения инвестора, вероятность исчезновения спроса на инвестиции и при этом инвестору запрещено занимать коротие позиции. Оказалось, что в такой постановке задача сводится к уравнению Беллмана. Однако решить такое уравнение в общем виде не удаётся. М. П. Ващенко в [5] нашёл оценку на субъективную (для инвестора) вероятность возникновения кризиса, выраженную через параметры модели, при которой выгодным становится осторожное поведение инвестора (то есть такое поведение, при котором даже в случае внезапного закрытия проекта для вложения инвестор сможет выполнить все обязательства по ранее начатым проектам). В той же работе М. П. Ващенко была найдена оценка сверху на темпы роста капитала в том случае, когда инвестор ведёт себя осторожно. В [6] им была получена оценка снизу на темп роста капитала при той же стратегии.

Однако более реалистична ситуация, когда кризис не наступает мгновенно. Зачастую можно наблюдать некие предпосылки кризиса, на основании которых можно предвидеть его наступление за некоторое время. Иначе говоря, можно рассмотреть модель, в которой будет фигурировать субъективная (для инвестора) вероятность наступления некоторого события, через несколько периодов после которого проект окажется закрыт для инвестирования. В этом случае изменится "осторожная стратегия" инвестора: у него не будет необходимости всегда оставаться в том состоянии, в котором он в любой момент будет готов выполнить все ранее данные обязательства, но ему будет нужно оставаться в том состоянии, из которого он сможет выйти с помошью инвестирования в течение некоторого (заранее определённого) числа шагов. Работы Д. Г. Кантора и С. А. Липмана ([1], [2]) фактически исследуют ситуацию, когда число шагов до кризиса стремится к бесконечности, а вероятность наступления кризиса равна 1 (то есть инвестор заранее знает момент, в который он должен прекратить инвестирование, и исследуется поведение инвестора и темпы роста его состояния при том, что количество периодов до этого момента стремится к бесконечности). Работы М. П. Ващенко ([5], [6]) посвящены ситуации, когда количество периодов от информации о наступлении кризиса до собственно наступления кризиса равно нулю, то есть кризис наступает мгновенно. Данная работа исследует множества состояний, в которых может находиться инвестор, если он узнаёт о наступлении кризиса за конечное, но ненулевое число шагов. На одном примере показывается отличие скорости роста капитала инвестора при осторожной стратегии в зависимости от числа периодов от известия о кризисе до непосредственного момента его наступления.

2 Описание модели без учёта рисков

В этом и следующем разделах используется модель, описанная Д. Г. Кантором и С. А. Липманом в [1]. Рассматривается модель в дискретном времени, N — инвестиционный горизонт, то есть время t принимает значения $t = \overline{0, N}$. Имеется M инвестиционных проектов. Обозначим номер проекта m $(m = \overline{1, M})$. Финансовые потоки m-го проекта — вектор $[a_0^m, a_1^m, ..., a_r^m]$, где r $(0 < r < +\infty)$ — наибольшая длина среди всех M проектов (для тех проектов, реальная длительность которых меньше r, дополним соответствующий вектор необходимым количеством нулей). Отрицательные a_i означают необходимую сумму вложния в проект, а положительные — прибыль, получаемую через i периодов после его начала. $u^m(t)$ — интенсивность проекта с номером m, начатого в момент времени t. Тогда такому проекту будут соответствовать финансовые потоки $[u^m(t)a_0, u^m(t)a_1, \ldots, u^m(t)a_r]$. Интенсивность обязательно неотрицательна (самое меньшее, что можно сделать, — это не начинать данный проект в этот момент времени, тогда соответствующая $u^m(t) = 0$), поэтому $u^m(t) \geqslant 0$ $\forall m = \overline{1, M},\ t = \overline{0, N}$. При этом каждый проект может быть начат с любой неотрицательной интенсивностью. Предполагается, что любой начинаемый проект финансируется исключительно из средств инвестора (то есть из его начального капитала либо средств, полученных от реализации других начатых проектов), возможности занимать средства у инветора нет. Кроме того, всегда доступным для инвестирования предполагается проект, описываеый вектором $[-1, 1]$ (save money project) - простое переведение средств из одного периода в последующий. К последнему периоду (N) все проекты должны быть завершены, поэтому $u^m(t) = 0$ $\forall m = \overline{1, M},\ t \geqslant N - r + 1$.

Обозначим S_t денежные остатки (имеющиеся в распоряжении средства) в момент времени t. Мы считаем, что "сторонних" источников средств нет, так что в каждый момент времени S_t должно быть неотрицательным (так называемое условие самофинансирования). Считаем, что в начальный момент времени имеющиеся в распоряжении вредства равны 1. Цель — максимизировать финальное "богатство".

Все вышеперечисленные соображения можно записать в виде задачи линейного программирования:

$$S_N \to \max \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} S_{t+1} = S_t + \sum\limits_{m=1}^{M} \sum\limits_{i=0}^{r} a_i^m u^m(t-i), & \left(t = \overline{0, N-1}\right) \\ S_t \geqslant 0, & \left(t = \overline{0, N}\right) \\ u^m(t) \geqslant 0, & \left(t = \overline{0, N-r},\ m = \overline{1, M}\right) \\ u^m(t) = 0, & \left(t = \overline{N-r+1, N} \text{ или } t < 0,\ m = \overline{1, M}\right) \\ S_0 = 1 \end{cases}$$

Пусть $M = 1$. Так как проект один, обозначим $a_i^1 = a_i$, $a(x) = \sum\limits_{i=0}^{r} a_i x^i$. Обозначим Y_N — оптимальное значение функционала задачи 2.1 для инвестиционного горизонта, равного N. В [1] доказана теорема:

Теорема (Кантор, Липман). *Если $a(1) \leqslant 0$, то $Y_N = 1$ $\forall N$ и инвестиционный проект никогда не используется. Если $a(1) > 0$ и $a(x)$ не имеет корней на интервале $(0, 1)$, то существует конечное число N, для которого $Y_N = \infty$. Если $a(1) > 0$ и $a(x)$ имеет корни на интервале $(0, 1)$, то пусть θ — наибольший из них и пусть θ имеет кратность $(h + 1)$. Тогда инвестиционный проект будет* *использоваться и существуют такие положительные числа $\lambda_1 < \lambda_2$, что*

$$\lambda_1 \frac{\theta^{-N}}{N^h} \leqslant Y_N \leqslant \lambda_2 \frac{\theta^{-N}}{N^h};$$

таким образом, Y_N растёт как $\left(\frac{1}{\theta}\right)^N$.

3 Учёт рисков

М. П. Ващенко в [5], [6] рассмотрел ситуацию, когда инвестор учитывает возможность наступления кризиса, причём считается, что кризис наступает внезапно. В этом случае ясно, как должно выглядеть множество состояний инвестора. Пусть теперь считается, что инвестор узнаёт о наступлении кризиса за m шагов ($m \neq 0, m \nrightarrow +\infty$). Тогда определить соответствующие множества гораздо сложнее. Чтобы в дальнейшем иметь возможность исследовать поведение инвестора и темпы роста капитала при таких предположениях, необходимо в явном виде найти множества состояний для различных m, которым должно принадлежать состояние инвестора, если он хочет иметь возможность выйти из них за m шагов (то есть таких состояний, что существует стратегия инвестирования, рассчитанная на m шагов, такая, что, применяя её, инвестор в конце концов сможет расплатиться по всем обязательствам).

3.1 Случай одного проекта

Для начала положим $M = 1$ (то есть имеется один проект), причём в начальный момент времени в этот проект требует вложений (то есть $a_0 < 0$). Пусть в момент t мы узнаём, что через m периодов времени возможность инвесирования исчезнет. Значит, по мере завершения проектов, количество доступных средств будет изменяться, но оно должно всегда оставаться неотрицательным.

Обозначим $S_i(t)$ сумму, которая будет доступна в момент $t+i$ после всех выплат по обязательствам в этот момент, если с момента t включительно не производилось инвестирования. $S_0(t)$ — сумма, доступная в момент t. Через $r-1$ период всякие изменения суммы прекратятся, так как длительность проекта равна $(r+1)$ и все уже начатые проекты будут завершены, поэтому имеет смысл рассматривать "богатство" до $S_{r-1}(t)$ включительно.

$$\vec{S}(t) = \begin{pmatrix} S_0(t) \\ S_0(t) + \sum\limits_{i=1}^{r} a_i u(t-i) \\ S_0(t) + \sum\limits_{i=1}^{r} a_i u(t-i) + \sum\limits_{i=1}^{r-1} a_{i+1} u(t-i) \\ \vdots \\ S_0(t) + \sum\limits_{k=0}^{r-1} \sum\limits_{i=1}^{r-k} a_{i+k} u(t-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0(t) \\ S_1(t) \\ S_2(t) \\ \vdots \\ S_{r-1}(t) \end{pmatrix}$$

Если бы инвестирование было прекращено в момент времени t, то $S_0(t+1) = S_1(t), S_1(t+1) = S_2(t),\ \ldots,\ S_{r-2}(t+1) = S_{r-1}(t),\ S_{r-1}(t+1) = S_{r-1}(t)$. То есть для получения вектора $\vec{S}(t+1)$ надо умножить на вектор $\vec{S}(t)$ матрицу D, имеющую такой вид:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Если же в момент t мы всё-таки начали наш проект с интенсивностью $u(t)$, то $S_i(t+1)$ получатся из $S_i(t+1)$, полученных в том случае, когда в момент t инвестирование прекратилось, прибавлением к ним соответствующей суммы коэффицинтов финансовых потоков, умноженной на интенсивность начатого проекта $u(t)$:

$$S_i(t+1) = S_{i+1}(t) + u(t)\sum_{k=0}^{i+1} a_i, \qquad i = \overline{0, r-2};$$

$$S_{r-1}(t+1) = S_{r-1}(t) + u(t)\sum_{k=0}^{r} a_i$$

Таким образом в общем случае получаем:

$$\vec{S}(t+1) = D\vec{S}(t) + u(t)\vec{b},$$

где

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \\ a_0 + a_1 + a_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 + ... + a_r \end{pmatrix},$$

при том условии, что $S_0(t) + a_0 u(t) \geqslant 0$ (при условии того, что мы не можем в текущий момент заплатить больше, чем осталось после выплат по всем обязательствам).

Так как предполагается, что $a_0 < 0$ для любого рассматриваемого проекта, можем без ограничения общности считать $a_0 = -1$ (в противном случае можем поделить все коэффициенты на $|a_0|$). Тогда вектор $\vec{b}$ будет выглядеть так:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - 1 \\ a_1 + a_2 - 1 \\ \vdots \\ a_1 + ... + a_r - 1 \end{pmatrix},$$

а дополнительное условие примет вид $u \leqslant S_0$.

Определим множество Γ_m (*множество ликвидных состояний*) как множество, которому должен принадлежать вектор $\vec{S}(t)$, чтобы существовала стратегия инвестирования для выхода из этого состояния за m периодов. То есть, если в момент t становится известно, что через m периодов инвестирование следует прекратить и при этом $\vec{S}(t) \in \Gamma_m$, то существуют такие интенсивности $u(t), u(t+1), ..., u(t+m-1)$, что, инвестируя в имеющийся проект с соответственной интенсивностью в следующие m периодов времени, можно добиться того, что в каждый момент до завершения всех начатых проектов количество имеющихся на руках средств будет неотрицательным. Очевидно, что если $m = 0$, то $\Gamma_0 = \mathbb{R}^r_+$. Наша задача - найти выражение для Γ_m для произвольного m. Естественно попытаться найти рекуррентную зависимость: если вектор $\vec{S(t)} \in \Gamma_m$, то должна существовать такая интенсивность $u(t)$, что, начиная в текущий момент времени проект с интенсивностью $u(t)$, получим вектор $\vec{S(t+1)}$, лежащий в Γ_{m-1}. Заметим, что момент времени t, в который мы получаем сообщение об окончании инвестирования через m периодов, не играет роли, поэтому на данном этапе рассуждений для упрощения записи можем отбросить аргумент t. Получим:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{r-1} \end{pmatrix}$$

Зададим рекуррентно:

$$\Gamma_{m+1} = \left\{ \vec{S} = (S_0, S_1, ..., S_{r-1}) \middle| D\vec{S} + u\vec{b} \in \Gamma_m,\ S_0 \geqslant u \geqslant 0 \right\}$$

То есть Γ_m представляет собой многогранник, а значит, может быть задана в виде

$$\Gamma_m = \left\{ \vec{S} \middle| C_m \vec{S} \leqslant \vec{\alpha}_m \right\}$$

Тогда рекуррентная формула принимает вид

$$\begin{aligned}\Gamma_{m+1} = \left\{ \vec{S} = (S_0, S_1, ..., S_{r-1}) \middle| C_m \left(D\vec{S} + u\vec{b} \right) \leqslant \vec{\alpha}_m,\ S_0 \geqslant u \geqslant 0 \right\} = \\ = \left\{ \vec{S} = (S_0, S_1, ..., S_{r-1}) \middle| \exists\, u \in \mathbb{R} : 0 \leqslant u \leqslant S_0, C_m \left(D\vec{S} + u\vec{b} \right) \leqslant \vec{\alpha}_m \right\} = \\ = \left\{ \vec{S} \middle| C_{m+1} \vec{S} \leqslant \vec{\alpha}_{m+1} \right\} \quad (3.1)\end{aligned}$$

Задача: найти рекуррентное выражение для $C_m, \vec{\alpha}_m$. То есть имеем систему неравенств

$$\begin{cases} C_m D\vec{S} + uC_m\vec{b} \leqslant \vec{\alpha}_m \\ 0 \leqslant u \leqslant S_0 \end{cases}, \quad (3.2)$$

где переменная — u. Требуется найти условия на вектор $\vec{S}$, при которых данная система имеет решение. Считая эту систему зачдачей максимизации с отсутствующим функционалом, запишем к данной задаче двойственную:

$$\begin{cases} C_m D\vec{S} + C_m\vec{b}u \leqslant \vec{\alpha}_m & \Big| \vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)^T \geqslant \vec{0}_r \\ \qquad\qquad u \leqslant S_0 & |\lambda_0 \geqslant 0 \\ \qquad\qquad u \geqslant 0 & \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(u, \vec{\lambda}, \lambda_0\right) = \left(\vec{\lambda}, \vec{\alpha}_m - C_m D\vec{S} - C_m\vec{b}u\right) + \lambda_0(S_0 - u) = \\ = \left(\vec{\lambda}, \vec{\alpha}_m - C_m D\vec{S}\right) + \lambda_0 S_0 - u\left(\left(\vec{\lambda}, C_m\vec{b}\right) + \lambda_0\right)\end{aligned}$$

Двойственная задача:

$$\left(\vec{\lambda}, \vec{\alpha}_m - C_m D\vec{S}\right) + \lambda_0 S_0 \to \min \tag{3.3}$$
$$\begin{cases} \lambda_0 + \left(\vec{\lambda}, C_m\vec{b}\right) \geqslant 0 \\ \lambda_0 \geqslant 0 \\ \vec{\lambda} \geqslant 0 \end{cases}$$

Функционал и ограничения линейно однородны по $\vec{\lambda}$ и λ_0, а значит, для того, чтобы существовал минимум функционала, необходимо, чтобы функционал был неотрицателен для всех $\vec{\lambda}$ и λ_0, удовлетворяющих ограничениям. В противном случае, если существуют $\vec{\lambda}$ и λ_0, удовлетворяющие ограничениям и такие, что для них функционал отрицателен, то, умножая их на сколь угодно большое число h, мы будем получать $\vec{\lambda}'$ и λ_0', также удовлетворяющие ограничениям, но функционал на них будет стремиться к $-\infty$ при стремлении h к $+\infty$.

Ограничение на λ_0 имеет вид:

$$\lambda_0 \geqslant \max\left\{-\left(\vec{\lambda}, C_m\vec{b}\right), 0\right\}$$

То есть требуется, чтобы для любого $\vec{\lambda} \geqslant 0$ и любого λ_0, удовлетворяющего ограничениям, функционал был неотрицателен. Но, так как λ_0 присутствует в функционале только в составе слагаемого $\lambda_0 S_0$, а $S_0 \geqslant 0$ всегда, необходимо и достаточно, чтобы функционал был неотрицателен для любого $\vec{\lambda} \geqslant 0$ и минимального допустимого λ_0. Итак, условие существования решения системы 3.3 выглядит следующим образом:

$$\forall\vec{\lambda} \geqslant 0: \quad \left(\vec{\lambda}, \vec{\alpha_m} - C_m D\vec{S}\right) + \max\left\{0, -\left(\vec{\lambda}, C_m\vec{b}\right)\right\} \cdot S_0 \geqslant 0 \tag{3.4}$$

Так как это неравенство должно быть выполнено для любого $\vec{\lambda} \geqslant 0$, то оно также обязно выполняться для $\vec{\lambda} = \vec{e_k}, k = \overline{1, r}$ ($\vec{e_k} = (0...0\ 1\ 0...0)^T$, где 1 стоит на k-м месте). Подставляя вместо $\vec{\lambda}$ последовательно $\vec{e_k}$, получим систему (в этом месте нумеруя компоненты векторов как 1, 2, ..., r):

$$\begin{cases} \alpha_m^1 - \left[C_m D\vec{S}\right]^1 + S_0 \cdot \max\left\{0, -\left[C_m\vec{b}\right]^1\right\} \geqslant 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \alpha_m^r - \left[C_m D\vec{S}\right]^r + S_0 \cdot \max\left\{0, -\left[C_m\vec{b}\right]^r\right\} \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Так как любой вектор $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}_+^r$ может быть разложен по единичным векторам с неотрицательными коэффициентами, то выполнение системы 3.5 равносильно выполнению условия 3.4.

Введём обозначение:

$$[\vec{a_-}]_i = \begin{cases} -a_i, & \text{если } a_i < 0; \\ 0, & \text{если } a_i \geqslant 0; \end{cases} \tag{3.6}$$

Будем называть $\vec{a_-}$, коэффициенты которого определяются по правилу 3.6, отрицательной срезкой вектора $\vec{a}$.

Заметим, что если $\left[C_m\vec{b}\right]_i < 0$, то

$$\max\left\{0, -\left[C_m\vec{b}\right]^i\right\} = -\left[C_m\vec{b}\right]^i = \left[C_m\vec{b}_-\right]^i,$$

а если $\left[C_m\vec{b}\right]_i \geqslant 0$, то

$$\max\left\{0, -\left[C_m\vec{b}\right]^i\right\} = 0 = \left[C_m\vec{b}_-\right]^i$$

.

В обоих случаях выражение слева равно выражению справа, значит,

$$\max\left\{0, -\left[C_m\vec{b}\right]^i\right\} = \left[C_m\vec{b}_-\right]^i$$

.

Тогда систему 3.5 можно компактнее записать так:

$$\vec{\alpha_m} - C_m D\vec{S} + (C_m\vec{b})_- \cdot S_0 \geqslant 0 \tag{3.7}$$

или

$$C_m D\vec{S} - (C_m\vec{b})_- \cdot S_0 \leqslant \vec{\alpha_m}. \tag{3.8}$$

Приведём левую часть 3.8 к виду $C_{m+1}\vec{S}$. Элементы 1-го столбца матрицы $C_m D$ умножаются на S_0, значит, к каждой компоненте 1-го столбца матрицы $C_m D$ прибавляется соответствующая компонента вектора $\left(C_m\vec{b}\right)_-$. Чтобы получить матрицу, у которой первый столбец представляет собой вектор $\left(C_m\vec{b}\right)_-$, а остальные компоненты — нули, умножим $\left(C_m\vec{b}\right)_-$ на $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$.

$$\left(C_m D - \left(C_m\vec{b}\right)_- \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\right)\vec{S} \leqslant \vec{\alpha_m} \tag{3.9}$$

Значит, мы получили рекуррентные соотношения для $C_m, \vec{\alpha_m}$:

$$\begin{cases} C_{m+1} = C_m D - \left(C_m\vec{b}\right)_- \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}; \\ \vec{\alpha_{m+1}} = \vec{\alpha_m}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Из 3.10 видно, что $\vec{\alpha_m}$ один и тот же для любого m.

Как уже говорилось выше, $\Gamma_0 = \mathbb{R}^r_+$, то есть $C_0 = -E_r, \vec{\alpha_0} = 0_r$, а значит, $\forall m \geqslant 0 : \vec{\alpha_m} = 0_r$.

В итоге для конусов ликвидных сотояний имеем:

$$\begin{aligned} &\Gamma_m = \left\{\vec{S} \middle| C_m\vec{S} \leqslant 0\right\}; \\ &\boxed{C_m = C_{m-1}D - \left(C_{m-1}\vec{b}\right)_- \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}}; \\ &C_0 = -E \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.2 Случай нескольких проектов

Попробуем теперь получить выражение для конуса ликвидных состояний в случае нескольких проектов. Как и в предыдущем случае, считаем, что каждый проект в начальный момент времени требует вложений. Тогда у нас имеется k проектов, задаваемых наборами $\left[-1, a_1^i, ..., a_r^i\right], i = \overline{1, k}$ (считаем $a_0^i = -1 \forall i$). Вместо вектора $\vec{b}$ появляется матрица B размера $r * k$:

$$B = \begin{pmatrix} a_1^1 - 1 & a_1^2 - 1 & \cdots & a_1^k - 1 \\ a_1^1 + a_2^1 - 1 & a_1^2 + a_2^2 - 1 & \cdots & a_1^k + a_2^k - 1 \\ & & \vdots & \\ a_1^1 + ... + a_r^1 - 1 & a_1^2 + ... + a_r^2 - 1 & \cdots & a_1^k + ... + a_r^k - 1 \end{pmatrix}$$

Вместо скалярной величины $u(t)$ появляется k-мерный вектор $\vec{u(t)} \geqslant 0$, где i-я компонента вектора означает интенсивность вложения в i-й проект. Для вектора $\vec{S(t+1)}$ получаем выражение:

$$\vec{S(t+1)} = D\vec{S(t)} + B\vec{u(t)}$$

Аналогично случаю одного проекта, момент времени t для нахождения конуса ликвидных состояний роли не играет, так что для сокращения записи мы его указывать не будем. Учитывая это, для конуса ликвидных состояний получаем:

$$\Gamma_{m+1} = \left\{ \vec{S} = (S_0, S_1, ..., S_{r-1}) \middle| \exists\, u \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i=1}^{k} u_i \leqslant S_0, \right. \\ \left. C_m \left(D\vec{S} + B\vec{u} \right) \leqslant \vec{\alpha}_m \right\} = \left\{ \vec{S} \middle| C_{m+1}\vec{S} \leqslant \vec{\alpha}_{m+1} \right\} \quad (3.12)$$

Тогда выполнение включения $\vec{S} \in \Gamma_{m+1}$ равносильно тому, что система

$$\begin{cases} C_m D\vec{S} + C_m B\vec{u} \leqslant \vec{\alpha}_m \\ \sum\limits_{i=1}^{k} u_i \leqslant S_0 \\ \vec{u} \geqslant 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

имеет решение.

Построим двойственную задачу:

$$\begin{cases} C_m D\vec{S} + C_m B\vec{u} \leqslant \vec{\alpha}_m & \Big| \vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)^T \geqslant \vec{0}_r \\ \sum\limits_{i=1}^{k} u_i \leqslant S_0 & |\lambda_0 \geqslant 0 \\ \vec{u} \geqslant 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\mathscr{L}\left(\vec{u},\vec{\lambda},\lambda_0\right) = \left(\vec{\lambda},\vec{\alpha}_m - C_mD\vec{S} - C_mB\vec{u}\right) + \lambda_0(S_0 - \sum_{i=1}^{k} u_i) =$$

$$= \left(\vec{\lambda},\vec{\alpha}_m - C_mD\vec{S}\right) + \lambda_0 S_0 - \left(\vec{\lambda}, C_mB\vec{u}\right) - \lambda_0\sum_{i=1}^{k} u_i =$$

$$= \left(\vec{\lambda},\vec{\alpha}_m - C_mD\vec{S}\right) + \lambda_0 S_0 - \left(\vec{\lambda}^T C_mB + \lambda_0 \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}}_{k}\right)\vec{u} =$$

$$= \left(\vec{\lambda},\vec{\alpha}_m - C_mD\vec{S}\right) + \lambda_0 S_0 - \left(\left[\vec{\lambda}^T C_mB + \lambda_0 \begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\right]^T, \vec{u}\right) =$$

$$= \left(\vec{\lambda},\vec{\alpha}_m - C_mD\vec{S}\right) + \lambda_0 S_0 - \left(B^T C_m^T\vec{\lambda} + \lambda_0\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}, \vec{u}\right)$$

Двойственная задача:

$$\left(\vec{\lambda},\vec{\alpha}_m - C_mD\vec{S}\right) + \lambda_0 S_0 \to \min \tag{3.15}$$
$$\begin{cases} \lambda_0\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} + B^T C_m^T\vec{\lambda} \geqslant 0 \\ \lambda_0 \geqslant 0 \\ \vec{\lambda} \geqslant 0 \end{cases}$$

Ограничение на λ_0 имеет вид:

$$\lambda_0 \geqslant \max_{i=\overline{1,k}}\left\{0, \left[-B^T C_m^T\vec{\lambda}\right]_i\right\}$$

По введённому определению отрицательной срезки получаем, что

$$\max_{i=\overline{1,k}}\left\{0, \left[-B^T C_m^T\vec{\lambda}\right]_i\right\} = \max_{i=\overline{1,k}}\left\{\left[\left(B^T C_m^T\vec{\lambda}\right)_-\right]_i\right\}$$

Как и в случае одного проекта, функцинал и ограничения линейны по $\vec{\lambda}$ и λ_0, а значит, для того, чтобы система имела решение, необходимо, чтобы функционал был неотрицателен. Повторяя рассуждения для случая одного проекта, получаем, что для существования решения системы 3.13 необходимо и достаточно, чтобы для любого $\vec{\lambda} \geqslant 0$ выполнялось неравенство:

$$\left(\vec{\lambda},\vec{\alpha_m} - C_mD\vec{S}\right) + \max_{i=\overline{1,k}}\left\{\left[\left(B^T C_m^T\vec{\lambda}\right)_-\right]_i\right\}\cdot S_0 \geqslant 0$$

Выполнено

$$\left(B^T C_m^T\vec{\lambda}\right)_- = \left(B^T C_m^T\right)_-\vec{\lambda},$$

так как $\vec{\lambda} \geqslant 0$.

Умножение матрицы на единичный вектор $\vec{e_j}$ выделяет j-й столбец этой матрицы. Принимая $\vec{\lambda} = \vec{e_j}, j = \overline{1,r}$, получаем r покомпонентных неравенств, которые должны выполняться совместно:

$$\begin{cases} \left[\alpha_m - C - mD\vec{S}\right]_1 + \max\limits_{i=\overline{1,k}} \left\{ \left[\left(B^T C_m^T \right)_- \right]_{i1} \right\} \cdot S_0 \geqslant 0 \\ \left[\alpha_m - C - mD\vec{S}\right]_2 + \max\limits_{i=\overline{1,k}} \left\{ \left[\left(B^T C_m^T \right)_- \right]_{i2} \right\} \cdot S_0 \geqslant 0 \\ \vdots \\ \left[\alpha_m - C - mD\vec{S}\right]_r + \max\limits_{i=\overline{1,k}} \left\{ \left[\left(B^T C_m^T \right)_- \right]_{ir} \right\} \cdot S_0 \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

Так как требуется найти выражение для матрицы ограничений, мы можем записать систему 3.16 в виде векторного неравенства. Тогда эти ограничения примут следующий вид:

$$\vec{\alpha_m} - C_m D\vec{S} + S_0 \begin{pmatrix} \max\limits_{i=\overline{1,k}} \left\{ \left[\left(B^T C_m^T \right)_- \right]_{i1} \right\} \\ \max\limits_{i=\overline{1,k}} \left\{ \left[\left(B^T C_m^T \right)_- \right]_{i2} \right\} \\ \vdots \\ \max\limits_{i=\overline{1,k}} \left\{ \left[\left(B^T C_m^T \right)_- \right]_{ir} \right\} \end{pmatrix} \geqslant 0$$

Обозначим

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \max\limits_{i=\overline{1,k}} \left\{ \left[\left(B^T C_m^T \right)_- \right]_{i1} \right\} \\ \max\limits_{i=\overline{1,k}} \left\{ \left[\left(B^T C_m^T \right)_- \right]_{i2} \right\} \\ \vdots \\ \max\limits_{i=\overline{1,k}} \left\{ \left[\left(B^T C_m^T \right)_- \right]_{ir} \right\} \end{pmatrix}.$$

Тогда ограничения на $\vec{S}$ записываются как

$$\vec{\alpha_m} - C_m D\vec{S} + S_0\vec{y} \geqslant 0$$

$$C_m D\vec{S} - S_0\vec{y} \leqslant \vec{\alpha_m}$$

$$\left(C_m D - \vec{y} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right) \vec{S} \leqslant \vec{\alpha_m}$$

Мы получили рекуррентные соотношения для $C_m, \vec{\alpha_m}$:

$$\begin{cases} C_{m+1} = C_m D - \vec{y} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \\ \vec{\alpha_{m+1}} = \vec{\alpha_m}. \end{cases} \tag{3.17}$$

$\vec{\alpha_0} = 0_r$, значит, $\vec{\alpha_m} = 0_r \ \forall m \geqslant 0$

В итоге для конусов ликвидных состояний имеем:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_m = \left\{ \vec{S} \middle| C_m \vec{S} \leqslant 0 \right\};\\
&\boxed{C_m = C_{m-1} D - \vec{y} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}};\\
&C_0 = -E
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

где

$$
\boxed{\vec{y} = \begin{pmatrix} \max\limits_{i=\overline{1,k}} \left\{ \left[\left(B^T C_m^T \right)_- \right]_{i1} \right\} \\ \vdots \\ \max\limits_{i=\overline{1,k}} \left\{ \left[\left(B^T C_m^T \right)_- \right]_{ir} \right\} \end{pmatrix}}.
$$

Таким образом, можно сформулировать

Определение 1. Пусть имеется модель, в которой существует $k \geqslant 0$ проектов, характеризуемых векторами финансовых потоков $[-1, a_1^i, \dots, a_r^i]$, $i = \overline{1,k}$, инвестору запрещено использовать заёмные средства и он узнаёт о наступлении кризиса за m шагов. Назовём множеством ликвидных состояний инвестора множество $\Gamma = \Gamma_m$, где

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_m = \left\{ \vec{S} = (S_0, S_1, ..., S_{r-1}) \middle| \exists\, \vec{u} \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i=1}^k u_i \leqslant S_0, D\vec{S} + B\vec{u} \in \Gamma_{m-1} \right\}, m > 0;\\
&\Gamma_0 = \mathbb{R}_+^r;\\
&B = \begin{pmatrix} a_1^1 - 1 & a_1^2 - 1 & \cdots & a_1^k - 1 \\ a_1^1 + a_2^1 - 1 & a_1^2 + a_2^2 - 1 & \cdots & a_1^k + a_2^k - 1 \\ & & \vdots & \\ a_1^1 + ... + a_r^1 - 1 & a_1^2 + ... + a_r^2 - 1 & \cdots & a_1^k + ... + a_r^k - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

В этом разделе нами доказано

Предложение 1. *Множества Γ_m, заданные в определении 1, определяются соотношениями*

$$
\Gamma_m = \left\{ \vec{S} \middle| C_m \vec{S} \leqslant 0 \right\},
$$

причём C_m определяются как

$$
C_m = C_{m-1} D - \vec{y} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},
$$

где

$$
\vec{y} = \begin{pmatrix} \max\limits_{i=\overline{1,k}} \left\{ \left[\left(B^T C_m^T \right)_- \right]_{i1} \right\} \\ \vdots \\ \max\limits_{i=\overline{1,k}} \left\{ \left[\left(B^T C_m^T \right)_- \right]_{ir} \right\} \end{pmatrix}.
$$

4 Модификация модели с учётом рисков

Модифицируем задачу об оптимизации инвестиционной деятельности с учётом возможных рисков. Сделаем это для случая 1 проекта. Пусть инвестор считает, что вероятность в следующий момент времени получить информацию о наступлении кризиса (при принятых предположениях - получить сообщение о том, что через m периодов времени наступит кризис), то есть вероятность того, что, начиная со следующего момента времени проект будет доступен для инвестирования ещё ровно m периодов, равна Δ. Считаем также, что Δ постоянна во времени. Обозначим $V(\vec{S})$ функцию Беллмана, которая будет оценивать наилучший результат инвестирования при описанных условиях и начальном финансовом состоянии $\vec{S}$. Тогда, как показано в [5], [6], при $m = 0$ уравнение Беллмана будет выглядеть следующим образом:

$$V\left(\vec{S}\right) = \max_{\left\{u \middle| u \geqslant 0, D\vec{S}+\vec{b}u \geqslant 0\right\}} \left[\Delta\left(D\vec{S}+\vec{b}u\right)_{r-1} + (1-\Delta)V\left(D\vec{S}+\vec{b}u\right)\right] \tag{4.1}$$

В правой части уравнения 4.1 стоит математическое ожидание капитала инвестора по всевозможным исходам, каковых в нашей модели два: получение или неполучение сообщения о наступлении кризиса. Если кризис наступил, то более инвестиционная деятельность не ведётся и окончательно инвестор будет обладать суммой, которая окажется на его счету после окончательных расчётов. Если же кризис не наступил, то мы оказываемся ровно в той ситуации, в которой были на предыдущем шаге, но с новым вектором $\vec{S}$. При этом

$$u\left(\vec{S}\right) = \arg \max_{\left\{u \middle| u \geqslant 0, D\vec{S}+\vec{b}u \geqslant 0\right\}} \left[\Delta\left(D\vec{S}+\vec{b}u\right)_{r-1} + (1-\Delta)V\left(D\vec{S}+\vec{b}u\right)\right] \tag{4.2}$$

В более общем случае, когда инвестор получает сообщение о кризисе за m периодов до его наступления, наилучший результат инвестирования при начальном финансовом состоянии $\vec{S}$ будет описываться следующим уравнением Беллмана:

$$V\left(\vec{S}\right) = \max_{\left\{u \middle| u \geqslant 0, D\vec{S}+\vec{b}u \in \Gamma_m\right\}} \left[\Delta V_1\left(D\vec{S}+\vec{b}u\right) + (1-\Delta)V\left(D\vec{S}+\vec{b}u\right)\right], \tag{4.3}$$

где

$$\begin{aligned}
V_1\left(\vec{S}\right) &= \max_{\left\{u \middle| u \geqslant 0, D\vec{S}+\vec{b}u \in \Gamma_{m-1}\right\}} V_2\left(D\vec{S}+\vec{b}u\right) \\
&\dots \\
V_{m-1}\left(\vec{S}\right) &= \max_{\left\{u \middle| u \geqslant 0, D\vec{S}+\vec{b}u \in \Gamma_1\right\}} V_m\left(D\vec{S}+\vec{b}u\right) \\
V_m\left(\vec{S}\right) &= \max_{\left\{u \middle| u \geqslant 0, D\vec{S}+\vec{b}u \in \Gamma_0\right\}} \left(D\vec{S}+\vec{b}u\right)_{r-1}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Последнее условие в 4.4 можно переписать как

$$V_m\left(\vec{S}\right) = \max_{\left\{u \middle| u \geqslant 0, D\vec{S}+\vec{b}u \geqslant 0\right\}} \left(D\vec{S}+\vec{b}u\right)_{r-1}. \tag{4.5}$$

5 Пример

Рассмотрим для примера проект, исследованный М.П. Ващенко в [5], [6], предполагая $m = 1$. Если инвестор предполагает наступление кризиса в каждый момент времени, то он будет вести себя осторожно (то есть всегда оставаясь в конусе Γ_1, чтобы иметь возможность выхода из текущего состояния). Тогда в 4.3 $\Delta = 1$, $m = 1$, и задача максимизации итогового состояния в каждый момент времени для инвестора выглядит так:

$$
\begin{gathered}
V\left(\vec{S}\right) = \max_{\left\{u \middle| u \geqslant 0, D\vec{S}+\vec{b}u \in \Gamma_1\right\}} V_1\left(D\vec{S}+\vec{b}u\right) \\
V_1\left(\vec{S}\right) = \max_{\left\{v \middle| v \geqslant 0, D\vec{S}+\vec{b}v \in \Gamma_0\right\}} \left(D\vec{S}+\vec{b}v\right)_3
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$

Для данного проекта $\vec{a} = [-1; -0,25; 1,75; -0,5; 0,75]$, $\vec{b} = [-1,25; 0,5; 0; 0,75]$,
$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C_0 = -E_4.$

Тогда система 5.1 переписывается так:

$$
S_3 + \frac{3}{4}(u+v) \to max \tag{5.2}
$$

$$
\begin{cases}
D\vec{S}+\vec{b}u \in \Gamma_1 \\
D\left(D\vec{S}+\vec{b}u\right)+\vec{b}v \in \Gamma_0 \\
S_0 - u \geqslant 0 \\
\left(D\vec{S}+\vec{b}u\right)_0 - v \geqslant 0 \\
u \geqslant 0, v \geqslant 0
\end{cases}
$$

Рассмотрим ситуацию, когда, вопреки ожиданиям инвестора, на протяжении большого количества периодов кризис не наступает. Логично предположить, что чем бо́льшее количество периодов m будет в распоряжении инвестора от информации о кризисе до собственно кризиса, тем бо́льшей свободой действий он обладает, следовательно, скорость роста капитала при возрастании m должна по крайней мере не убывать. Однако, как оказывается, доходность может зависеть от стратегии инвестирования.

Известны оценки для этого проекта: оценка Кантора-Липмана (для $m \to \infty$ $\lambda = 1,236$) и оценка, полученная в [6] М.П. Ващенко (при $m = 0$ $\quad \lambda = 1,192$).

Обозначим F – значение функционала в задаче 5.2: $F = S_3 + \frac{3}{4}(u+v)$. Обозначим f – финальное богатство после двукратного применения стратегии, рассмотренной в [6] (в этом случае на каждом шаге максимизируется $S_3 + \frac{3}{4}u$, а векторы $\vec{S}$ и $D\vec{S}+\vec{b}u$ принадлежат Γ_0). Получаем формулы для F и f:

Если $S_1 \leqslant \dfrac{4}{5}S_2,$ то $F = S_3 + \dfrac{3}{4}S_1;$
Если $\dfrac{4}{5}S_2 \leqslant S_1 \leqslant \dfrac{4}{5}S_2 + \dfrac{33}{20}S_0,$ то $F = S_3 + \dfrac{5}{11}S_1 + \dfrac{1}{11}S_2;$
Если $S_1 \geqslant \dfrac{4}{5}S_2 + \dfrac{33}{20}S_0,$ то $F = S_3 + \dfrac{3}{5}S_2 + \dfrac{21}{20}S_0.$
Если $S_1 \leqslant \dfrac{5}{4}S_0,$ то $f = S_3 + \dfrac{3}{4}S_1;$
Если $\dfrac{5}{4}S_0 \leqslant S_1 \leqslant \dfrac{4}{5}S_2 + \dfrac{33}{20}S_0,$ то $f = S_3 + \dfrac{3}{4}S_1 - \dfrac{3}{16}S_0;$
Если $S_1 \geqslant \dfrac{4}{5}S_2 + \dfrac{33}{20}S_0,$ то $f = S_3 + \dfrac{3}{5}S_2 + \dfrac{21}{20}S_0.$

Рассмотрим три стратегии, которых может придерживаться инвестор, действуя осторожно, если от известия до кризиса проходит 1 период.

1) Инвестор, исходя из текущего вектора $\vec{S}$, определяет u и v из задачи 5.2. Делает шаг u, после чего, если информация о кризисе поступила, делает шаг v и заканчивает инвестирование, а если информации о кризисе не поступило, то определяет вектор $\vec{S}$ нового момента и начинает всё заново. Таким образом, инвестор на каждом шаге корректирует своё поведение, не совершая всех «запланированных действий».

2) Инвестор, исходя из текущего вектора $\vec{S}$, определяет u и v из задачи 5.2. Делает шаги u и v, после чего, если возможности инвестировать больше нет, заканчивает свою деятельность, если есть возможность сделать ровно один шаг, делает его, следуя стратегии из [6], а если никакой информации о кризисе не поступало, то определяет новый вектор $\vec{S}$ и начинает всё заново. Таким образом, инвестор совершает все запланированные действия, после чего действует, исходя из сложившейся ситуации.

3) Инвестор вообще не рассчитывает на тот шаг, который всё ещё будет доступен с момента поступления сообщения о кризисе до собственно кризиса, и в каждый момент времени делает шаг согласно стратегии, рассмотренной в [6].

Сравним скорость роста капитала при следовании этим трём стратегиям в случае, когда инвестиционный горизонт равен , и $T \to \infty$.

Как было показано в [6], следуя стратегии 3), скорость роста капитала $\lambda_3 = 1,192$.

Следуя стратегии 2), скорость роста λ_2 ненамного, но всё же превышает λ_3: $\lambda_2 = 1,193$. Это соответствует тому, что расширение возможностей позволяет добиться более быстрого роста капитала.

Неожиданный эффект можно наблюдать, следуя стратегии 1): $\lambda_1 = 1,076$. Этот эффект можно объяснить тем, что функционал задачи 5.2 максимизируется при применении всех шагов, найденных при решении задачи. Если же «основную роль» в максимизации функционала играет не первый, а второй шаг (как это было в рассмотренном примере), то при изменении стратегии в каждый момент времени скорость роста капитала может существенно упасть, что и наблюдалось в данном случае.

В частности, если количество средств, имеющихся в распоряжении инвестора в начальный момент времени, равно 1 (то есть $\vec{S}(0) = [1,1,1,1]$), а инвестирование будет возможно в течение 4 периодов, то можно подсчитать финальное состояние инвестора V после завершения всех начатых проектов: $V_1 = 1,99;\ V_2 = 2,38;\ V_3 = 2,2.$

Таким образом, можно заключить, что по крайней мере в некоторых инвестиционных проектах корректировать своё поведение на каждом шаге невыгодно, более выигрышным оказывается поведение, при котором однажды выбранная стратегия выполняется до конца, а уже после этого строится новая стратегия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (16-11-10246).

Список литературы

[1] *D. G. Cantor, S. A. Lipman* Investment selection with imperfect capital markets. // Econometrica, July 1983, v.51, №4, p. 1121-1144.

[2] *D. G. Cantor, S. A. Lipman* Optimal investment selection with a multitude of projects. // Econometrica, Sep., 1995, v.63, №5, p. 1231-1240.

[3] *М. П. Ващенко, А. А. Шананин* Оценка доходности пула инвестиционных проектов в модели оптимального инвестирования в непрерывном времени. // Математическое моделирование, 2012, т. 24, № 3, с. 70-86.

[4] *А. А. Шананин, Л. И. Биккинина* К теории доходности инвестиционных проектов в условиях несовершенного финансового рынка. XLVI конференция МФТИ, с. 136-137.

[5] *М. П. Ващенко* Исследование уравнения Беллмана в оной задаче оптимального инвестирования. // Сборник статей молодых учёных факультета ВМиК МГУ, 2006, вып. №3, с. 32-43.

[6] *М. П. Ващенко* Оценка доходности инвестиционных проектов в условиях неопределённости. // Математическое моделирование, 2009, т. 21, №3, с. 18-30.

[7] *E. L. Presman, I. M. Sonin* Growth rate, internal rate of return and financial bubbles. Working paper, WP/2000/103, Moscow, CEMI Russian Academy of Science, 2000, 33p.