УДК 511.4

Критерий подстановочности палиндромов Штурма

Решетников И.[1]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)

Фактординамика прыжков по окружности.

Пусть есть динамическая система (M, R_α, x_0, U). Фактординамика получается отождествлением точек различающиеся на $\frac{m}{n}$, где n фиксировано, $m \in N$. Такая обобщённая точка будет правильным -угольником. Тогда попаданий в выделенную дугу может быть либо $k = [n\alpha]$ либо на 1 больше для каждой обобщённой точки. Будем писать a, если их $k+1$ и b иначе. Обозначим эту фактординамику через $\left(\frac{M}{n}, R_\alpha, x_0, \frac{U}{n}\right)$

Задача. Доказать, что если слово w*, порождённое символической динамикой* (M, R_α, x_0, U) *подстановочное, то и слово* w'*, порождённое символической фактординамикой* $\left(\frac{M}{n}, R_\alpha, x_0, \frac{U}{n}\right)$ *тоже подстановочное.*

Решение. Заметим, что множество, получающееся факторизацией окружности по данному отношению эквивалентности, изоморфно окружности ω длины $1/n$. При этом точки, при попадании на которые мы пишем a (множество U') образуют дугу α' длины $\alpha' = \alpha - \frac{[n\alpha]}{n} = a - \frac{k}{n}$.

Поворот на угол α на окружности M отвечает повороту на угол $n\alpha$ на окружности ω.

Увеличив длину окружности ω и длину дуги α' в n раз (сделав гомотетию) получим, соответственно, символическую динамику (M, R_α, x_0, U'). Угол $n\alpha$ отличается от угла α' несколькими оборотами вокруг окружности, поэтому поворот на угол $n\alpha$ совпадает с поворотом на угол α'. Таким образом мы получили стандартную символическую динамику поворотов окружности единичной длины на угол α'.

Благодаря методу индукции Рози мы знаем, что слово является подстановочным тогда и только тогда, когда α – квадратичная иррациональность.

Если слово w подстановочное, то α – квадратичная иррациональность, а значит, и α' – квадратичная иррациональность, поэтому слово w' также будет подстановочным.

Критерий подстановочности палиндромных слов Штурма.

Всего есть три двусторонне бесконечных палиндрома, являющихся механическими словами параметра α. Это слова, отвечающие серединам дуг и слово, получающееся из точки, которая первым поворотом переходит в точку, симметричную ей относительно оси симметрии динамической системы. Палиндромы, получающиеся из середин дуг симметричны относительно своей буквы, а третий палиндром симметричен относительно междубуквия.

С помощью аналога индукции Рози для палиндромов докажем следующий критерий подстановочности палиндромов Штурма. Во всём разделе полагаем алфавит $A = \{0, 1\}$.

Символическая динамика (M, R_α, x_m, U)*, где* x_m *– середина дуги* U *длины* α *на окружности* M *длины 1 порождает подстановочный двусторонне-бесконечный палиндром* p *тогда и только тогда, когда* α *– квадратичная иррациональность.*

Так как наше преобразование окружности обратимо, то можно говорить и о двусторонне-бесконечных словах, порождаемых символической динамикой. В частности, о словах-палиндромах. Доказательство основано на сходстве некоторого алгоритма с индукцией Рози.

Доказательство.

В одну сторону: если слово p является подстановочным, то α – квадратичная иррациональность. α – доля числа единиц. Пусть подстановка φ порождает слово p. Пусть при действии порождающей подстановки φ 0 переходит в слово с a нулями и b единицами, а 1 переходит в слово с c нулями и d единицами. Тогда, так как p – неподвижная точка подстановки φ, получаем квадратичное относительно α уравнение

$$\alpha = \frac{\mathrm{b}(1-\alpha) + \mathrm{d}\,\alpha}{(\mathrm{a}+\mathrm{b})(1-\alpha) + (\mathrm{c}+\mathrm{d})\alpha}$$

значит, α – квадратичная иррациональность.

В другую сторону, если α – квадратичная иррациональность, то p подстановочно. Пусть есть бесконечное слово Штурма p – палиндром над алфавитом $A = \{0, 1\}$. Пусть в нём доля единиц равна α. Если нулей меньше, чем единиц, то сделаем подстановку $E : 0 \rightarrow 1$. Остаётся расписать действия алгоритма при $\alpha < 1/2$. Так как p является словом Штурма и $\alpha < 1/2$ в нём не могут встретиться две единицы подряд. Возможны несколько случаев.

1. Слово p симметрично относительно 1. Будем относить эту 1 к левой половине слова p. Так как в слове p нулей больше, чем единиц, то перед каждой единицей идёт ноль. Значит, слово p получается подстановкой (обозначение согласовано с [1]) $G : \begin{matrix} 1 & \rightarrow & 01 \\ 0 & \rightarrow & 0 \end{matrix}$ из некоторого слова p'. Причём подстановка подобрана так, что левая и правая части слова p получаются из левой и правой части слова p'. Так как количество нулей в каждой группе нулей уменьшилось на 1, а больше ничего не произошло, то слово p' также является палиндромом, симметричным относительно 1.

2. Слово p симметрично относительно 0. Будем относить этот 0 к левой половине слова p .Так как в слове p нулей больше, чем единиц, то после каждой единицы идёт ноль. Значит, слово p получается подстановкой $\tilde{G} : \begin{matrix} 1 & \rightarrow & 10 \\ 0 & \rightarrow & 0 \end{matrix}$ из некоторого слова p'. Левая и правая части слова p получаются соответственно из левой и правой частей слова p'. Количество нулей в каждой группе нулей уменьшилось на 1, поэтому слово p' также является палиндромом, но на этот раз симметричным относительно междубуквия.

3. Слово p симметрично относительно междубуквия. Тогда буквы w_0 и w_1должны быть нулями. Тогда слово p получается подстановкой G из некоторого слова p', при этом слово p' симметрично относительно нуля.

В нашем случае α – квадратичная иррациональность.
При действии приведённого алгоритма α претерпевает такие же изменения, как и в индукции Рози, а значит, так как α – квадратичная иррациональность, то доля единиц α начиная с некоторого момента будет изменяться периодически. Для каждого α возможны лишь три варианта симметричности, три различных палиндрома. Поэтому возможно лишь конечное число пар (α, j), где j – номер варианта симметричности. Для каждой пары однозначно определён переход согласно алгоритму к некоторой другой паре. Поэтому процесс и в общем также цикличен. Из цикличности процесса следует, что палиндром p подстановочен, аналогично индукции Рози.

Литература

1. M. Lothaire/ Algebraic combinatorics on words. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 90. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, 504 pp
2. J. Berstel/ P. S., Sturmian words, in: M. Lothaire (Ed.) / Algebraic Combinatorics on Words, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 90, Cambridge University Press, Cambridge, 2002 (Chap. 2).
1. J.Berstel/ Resent results on Sturmian words, Developments in language theory II, 13-24, World Scientific, 1996.
2. 4.M. Morse and G. A. Hedlund/ , Symbolic dynamics II.
Sturmian trajectories, Amer. J. Math. 62, 1-42., 1940