УДК 531.381

Об устойчивости волчка Лагранжа в наблюдаемых переменных

***Ш.В. Сандуляну*[1,2], *А.Г. Петров*[1,2]**

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Твердое тело вращающееся около неподвижной точки представляет собой систему с тремя степенями свободы. Традиционно в качестве обобщенных координат твердого тела принимают углы Эйлера: углы нутации, прецессии и собственного вращения. В силу своей особенности углы Эйлера неудобны для описания движения, когда угол нутации обращается в ноль. Для динамически симметричного твердого тела (волчок Лагранжа) В.Ф. Журавлев ввел наблюдаемые переменные: декартовы координаты единичного вектора $\mathbf{e}(x, y, z)$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, направленного по оси динамической симметрии волчка (рис. 1). Наблюдаемые переменные являются усеченной системой обобщенных координат, которые определяют положение только оси симметрии. Часто этого бывает достаточно и тогда анализ динамики твердого тела значительно упрощается. Это показано на примере доказательства теоремы Маиевского-Четаева.

Запишем уравнение изменения кинетического момента волчка [1]

$$A(\mathbf{e}\times\ddot{\mathbf{e}}) + C\dot{r}\mathbf{e} + Cr\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{M} = -mgl\mathbf{e}\times\mathbf{k} \tag{1}$$

где $A = B, C$ – главные оси инерции волчка, $\mathbf{k}$ единичный вектор, направленный вертикально вверх по оси z, $l = OP$ – расстояние от точки закрепления O до центра тяжести P, r – проекция угловой скорости тела на ось $\mathbf{e}$.

Все слагаемые векторного уравнения, кроме второго перпендикулярны вектору $\mathbf{e}$, поэтому $\dot{r} = 0$ и $r = const$.

Система уравнений имеет два интеграла: интеграл энергии и интеграл момента

$$\frac{1}{2}A\dot{\mathbf{e}}^2 + mgl(z-1) = E, \quad A(x\dot{y} - y\dot{x}) + Cr(z-1) = K \tag{2}$$

Рассматривая E и K как аналитические функции независимых переменных $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ и r, сконструируем функцию Ляпунова

$$V(x, y, \dot{x}, \dot{y}, r) = E - \frac{Cr}{2A}K + \frac{C^2}{2A}\frac{(r^2 - r_0^2)^2}{r^2} \tag{3}$$

После выделения полных квадратов новая функция Ляпунова принимает вид:

$$\begin{aligned} V = {} & \frac{A\dot{z}^2}{2(x^2+y^2)} + \frac{\left(K + Cr(1-z)^2/2\right)^2}{2A(x^2+y^2)} + \frac{C^2r^2}{4A}\left(\frac{(1-z)}{2} + \frac{(r^2-r_0^2)}{r^2}\right)^2 + \\ & + \frac{C^2r^2}{16A}(1-z)^2 + \frac{C^2}{4A}\frac{(r^2-r_0^2)^2}{r^2} + \left(\frac{C^2r_0^2}{4A} - mgl\right)(1-z) \end{aligned} \tag{4}$$

Функция Ляпунова V строго положительна, если $x^2 + y^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (r^2 - r_0^2)^2 > 0$, и удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова. Таким образом, доказана устойчивость при $C^2r_0^2 \geq 4Amgl$ по отношению ко всем переменным $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ и r.

Если же выполнено неравенство $C^2r_0^2 < 4Amgl$, то стационарное вращение волчка, как показано ниже, неустойчиво.

Рассмотрим движение волчка, у которого в начальный момент времени $\tau = 0$ ось симметрии вертикальна. Для этого интегралы (2) запишем в полярной системе координат в безразмерном виде

$$
x=\rho\cos\alpha,\quad y=\rho\sin\alpha,\quad \tau=t\sqrt{\frac{mgl}{A}},\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\dot\rho^2}{z^2}+\rho^2\dot\alpha^2\right)+(z-1)=E_1,
$$

$$
\rho^2\dot\alpha+2\mu(z-1)=K_1,\quad \mu=\frac{Cr_0}{\sqrt{4Amgl}},\qquad \dot\rho=\frac{d\rho}{d\tau},\quad \dot\alpha=\frac{d\alpha}{d\tau},\quad z=\sqrt{1-\rho^2} \tag{5}
$$

Таким образом, в начальном положении $\rho=\pm\sqrt{x^2+y^2}=0$ и $K_1=0$. Из интеграла момента находим $\dot\alpha$ и подставляем в интеграле энергии, тогда система интегралов преобразуется к виду

$$
\frac{\dot\rho^2}{2z^2}+\Phi(\rho)=v_0^2/2,\quad \rho^2\dot\alpha=2\mu(1-z),
$$

$$
\Phi(\rho)=z-1+2\mu^2\left(\frac{1-z}{\rho}\right)^2=\frac{1}{2}(\mu^2-1)\rho^2+\frac{2\mu^2-1}{8}\rho^4+O(\rho^6) \tag{6}
$$

Здесь точкой обозначена производная по безразмерному времени τ. В начальный момент концу вектора **e** (апексу) сообщают скорость $\dot\rho(0)=v_0$, под действием которой апекс начинает двигаться. Если $v_0=0$, то волчок совершает стационарное вращение около вертикальной оси.

В точке равновесия $\rho=0$ при $\mu^2\ge 1$ функция $\Phi(\rho)$ имеет строгий минимум и по теореме Лагранжа это равновесие устойчиво. При $\mu^2<1$ эффективная потенциальная энергия $\Phi(\rho)$ имеет строгий максимум и равновесие $\rho=0$ неустойчиво.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14–19–01633).

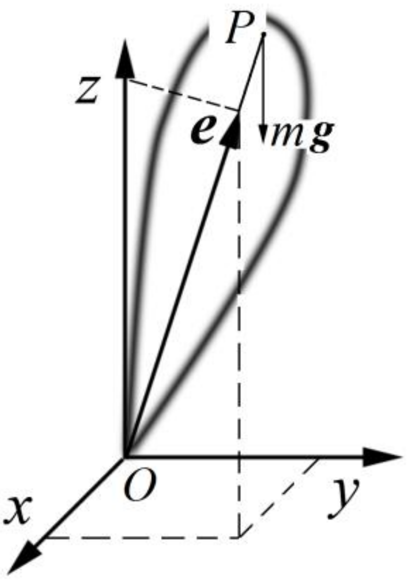

Рис. 1. Волчек Лагранжа

Литература

1. *Журавлёв В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997. 320 с.