

О нелинейном эффекте Циглера и малых колебаниях в
неконсервативных системах с двумя степенями свободы

А. Ю. Майоров, А. Е. Байков

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Москва, 2016

Цели и задачи работы

- ▶ Получение условий существования предельного инвариантного тора
- ▶ Исследование линейного эффекта Циглера, когда линейные диссипативные силы могут дестабилизировать положение равновесия, устойчивое в их отсутствие [1, 2].
- ▶ Исследования нелинейного эффекта Циглера.
- ▶ На примере механической модели провести испытания полученных результатов

[1] Байков А.Е. Предельный цикл в неконсервативной системе при резонансе 1:2: ПММ, 75:3 (2011), 384–395.

[2] Байков А.Е., Красильников П.С. Об эффекте Циглера в неконсервативной механической системе: ПММ, 74:1 (2010), 74–88.

Постановка задачи

Рассматриваются голономные склерономные механические системы, подверженные действию потенциальных, неконсервативных позиционных и диссипативных сил, линейных и квадратичных по обобщённым скоростям. Уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движения таких систем, имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\nabla \Pi - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}} + Q_i \quad (1)$$

Здесь $q = (q_1, q_2)^T$ – вектор обобщенных координат, Φ, Ψ – диссипативные функции Рэлея, квадратические и кубические по обобщенным скоростям соответственно. Выражения для диссипативных функций имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\epsilon}{2} (\bar{B} \dot{q}, \dot{q}) \\ \Psi &= \frac{\delta}{3} F(|\dot{q}|) = \frac{\delta}{3} (d_{30} |\dot{q}_1|^3 + d_{21} |\dot{q}_1|^2 |\dot{q}_2| + d_{12} |\dot{q}_1| |\dot{q}_2|^2 + d_{03} |\dot{q}_2|^3) \end{aligned} \quad (2)$$

где ϵ, δ – положительные малые параметры, \bar{B} – симметрическая положительно определенная матрица, d_{ij} , $(i + j = 3)$ – положительные параметры. Считаем, что малые параметры ϵ и δ связаны степенным соотношением $\delta = \epsilon^\beta$ для некоторого $\beta > 0$.

Предполагается, что система (1) имеет изолированное

Постановка задачи

Уравнения (1) можно записать в явном виде следующим образом:

$$\ddot{q}_j + (\Gamma^{(j)}\dot{q}, \dot{q}) = \left(\alpha_j, -\nabla\Pi + Q_j - \epsilon\bar{B}\dot{q} - \frac{\delta}{3}D_{(j)}(|\dot{q}|) \right), \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь $\alpha^{(j)}$ – j -й столбец матрицы $A(q)^{-1}$ ($j = 1, 2$), $\Gamma^{(j)}$ – симметрическая матрица, элементы которой суть символы Кристоффеля второго рода матрицы $A(q)$:

$$\Gamma_{kl}^{(j)} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 \alpha_{sj} \left(\frac{\partial a_{ks}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{sl}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{lk}}{\partial q_s} \right)$$

Выражения для однородных функций второй степени $D_{(1)}$ и $D_{(2)}$ имеют вид:

$$D_{(1)} = \frac{\partial\Psi_1}{\partial\dot{q}_1} = 3d_{30}\dot{q}_1|\dot{q}_1| + 2d_{21}\dot{q}_1|\dot{q}_2| + d_{12}|\dot{q}_2|^2\text{sgn}(\dot{q}_1)$$

$$D_{(2)} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial\dot{q}_2} = 3d_{03}\dot{q}_2|\dot{q}_2| + 2d_{12}\dot{q}_2|\dot{q}_1| + d_{21}|\dot{q}_1|^2\text{sgn}(\dot{q}_2)$$

Линеаризация уравнений движения

Разложив матрицу кинетической энергии и позиционные силы по степеням координат получим:

$$A(q) = \bar{A} + A^{(1)}q_1 + A^{(2)}q_2 + \bar{o}(|q|), \quad -\nabla\Pi + Q(q) = \bar{C}q + Q^{(2)}(q) + \bar{o}(|q|^2) \quad (4)$$

Вектор $Q^{(2)}(q)$ состоит из квадратичных по координатам форм. Умножением на матрицу \bar{A} уравнения (3) преобразуется к виду

$$\bar{A}\ddot{q} + \epsilon\bar{B}\dot{q} + \bar{C}q + \bar{F}^{(2)}(q, \dot{q}) + \epsilon\bar{G}^{(2)}(q, \dot{q}) + \frac{\delta}{3}D^{(2)} + \dots = 0 \quad (5)$$

$D^{(2)} = (D_1, D_2)^T$, выражение для $F^{(2)}$ и $G^{(2)}$ имеют вид

$$\bar{F}^{(2)} = -Q^{(2)} + (A^{(1)}q_1 + A^{(2)}q_2)\bar{A}^{-1}\bar{C}q + \tilde{F}^{(2)}$$

$$G^{(2)} = -(A^{(1)}q_1 + A^{(2)}q_2)\bar{A}^{-1}\bar{B}\dot{q},$$

где вектор $\tilde{F}^{(2)}$ состоит из некоторых квадратичных форм по обобщенным скоростям, выражения для которых опускаем.

Нормализация уравнений движения

С помощью масштабирующей замены в системе (5) по формулам

$$q = \epsilon^\alpha q', \quad \dot{q} = \epsilon^\alpha \dot{q}', \quad \text{где } \alpha > 0.$$

и считая, что $\delta = \epsilon^\beta$, система (5) преобразуется в квазилинейную систему вида

$$\bar{A}\ddot{q}' + \epsilon\bar{B}\dot{q}' + \bar{C}q' + \epsilon^\alpha\bar{F}^{(2)} + \epsilon^{\alpha+1}\bar{G}^{(2)} + \epsilon^{\alpha+\beta}\frac{1}{3}D^{(2)} + \dots = 0 \quad (6)$$

Пологая $\beta = 1 - \alpha$ и $\alpha = \frac{1}{2}$ и отбрасывая в уравнении (6) все члены выше порядка ϵ и выше, получим систему вида

$$\bar{A}\ddot{q}' + \epsilon\bar{B}\dot{q}' + \bar{C}q' + \epsilon^{\frac{1}{2}}\bar{F}^{(2)} + \frac{\epsilon}{3}D^{(2)} + \dots = 0 \quad (7)$$

Порождающая система

$$\bar{A}\ddot{q}' + \bar{C}q' = 0$$

обратима, поэтому устойчивость тривиального положения равновесия возможна только в критическом случае, когда характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни.

Нормализация уравнений движения

Пусть уравнение частот

$$\det(-\omega^2 \bar{A} + \bar{C}) = 0$$

имеет положительные простые корни ω_1, ω_2 , которые не находятся в резонансе. С помощью неособенного линейного преобразования $q' = Sx$, где $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^2$ приведем систему (7) к главным координатам. Отбросим члены порядка выше ϵ и перейдем к укороченной системе

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \epsilon B \dot{x} + \epsilon^{\frac{1}{2}} F^{(2)} + \frac{\epsilon}{3} D^{(2)} = 0, \quad \Omega^2 = \text{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2\}, \quad B = S^{-1} \bar{B} S \quad (8)$$

Функция $F^{(2)}$ имеет структуру аналогичную \bar{F} :

$$F^{(2)} = (F_1, F_2)^T, \quad F = (P^{(j)} x, x) + (R^{(j)} \dot{x}, \dot{x}), \quad j = 1, 2$$

а симметричные матрицы $\tilde{R}^{(j)}$ имеют вид

$$\tilde{R}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{11}^{(2)} \\ a_{11}^{(2)} & 2a_{12}^{(1)} - a_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a_{12}^{(1)} - a_{11}^{(2)} & a_{22}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Нормализация уравнений движения

Нормализуем систему (7) с помощью метода Хори-Кэмила [3].

Пусть z — фазовый вектор системы (7). Следуя методу Хори-Кэмила, рассмотрим близкую к тождественной замену переменных $z \mapsto \xi$ вида

$$z = \xi + \sqrt{\epsilon}\xi^{(1)}(\xi) + \frac{\epsilon}{2}\xi^{(2)}(\xi)$$

с производящей векторной функцией $W(\xi; \epsilon) = W^{(1)}(\xi) + \sqrt{\epsilon}W^{(2)}(\xi)$.

Отсутствие резонансов позволяет уничтожить квадратичные члены $F^{(2)}$ в системе (7), после чего получаем систему, которую можно представить в виде

$$\ddot{y} = -\Omega^2 y + \epsilon(B\dot{y} + D(\dot{y}, |\dot{y}|) + N^{(3)}(y, \dot{y})) \quad (10)$$

где $N^{(3)}(y, \dot{y})$ - форма третьей степени относительно координат и скоростей, а D однородная векторная функция второго порядка.

[3] A.A. Kamel Perturbation Method in the Theory of Nonlinear Oscillations: Celestial Mechanics, 3 (1970), 90–106.

Исследование усредненной системы

С помощью замены переменных

$$y = \rho_1 e_1 \cos(\phi_1) + \rho_2 e_2 \cos(\phi_2), \quad \dot{y} = -\omega_1 \rho_1 e_1 \sin(\phi_1) - \omega_2 \rho_2 e_2 \sin(\phi_2) \quad (11)$$

$$e_1 = (1, 0)^T, \quad e_2 = (0, 1)^T, \quad \rho_1 > 0, \rho_2 > 0$$

система (10) преобразуется к двухчастотной системе вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho}_1 = -\frac{\epsilon}{\omega_1} f_1 \sin(\phi_1) \\ \dot{\rho}_2 = -\frac{\epsilon}{\omega_2} f_2 \sin(\phi_2) \\ \dot{\phi}_1 = \omega_1 - \frac{\epsilon}{\omega_1 \rho_1} f_1 \cos(\phi_1) \\ \dot{\phi}_2 = \omega_2 - \frac{\epsilon}{\omega_2 \rho_2} f_2 \cos(\phi_2) \end{array} \right. \quad (12)$$

$$(f_1, f_2)^T = B\dot{\rho} \sin(\phi) + D^{(2)} + N^{(3)}$$

где $(f_1, f_2)^T = B\dot{\rho} \sin(\phi) + D^{(2)} + N^{(3)}$.

Исследование усредненной системы

Выражения для $D^{(2)}$ теперь имеют вид:

$$\begin{aligned} D_1 = & 2|s_{21}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)| \sin(\phi_1)s_{11}d_{21}\rho_1\omega_1 + \\ & + 3|s_{11}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)| \sin(\phi_1)s_{11}d_{30}\rho_1\omega_1 + \\ & + 2|s_{21}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)| \sin(\phi_2)s_{12}d_{21}\rho_2\omega_2 + \\ & + 3|s_{11}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)| \sin(\phi_2)s_{12}d_{30}\rho_2\omega_2 + \\ & + \operatorname{sgn}(s_{11}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2))|s_{21}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)|^2 d_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 = & 2|s_{11}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)| \sin(\phi_1)s_{21}d_{12}\rho_1\omega_1 + \\ & + 3|s_{21}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)| \sin(\phi_1)s_{21}d_{03}\rho_1\omega_1 + \\ & + 2|s_{11}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)| \sin(\phi_2)s_{22}d_{12}\rho_2\omega_2 + \\ & + 3|s_{21}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)| \sin(\phi_2)s_{22}d_{03}\rho_2\omega_2 + \\ & + \operatorname{sgn}(s_{21}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2))|s_{11}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)|^2 d_{21} \end{aligned} \tag{13}$$

где s_{ij} — элементы матрицы S перехода к главным координатам.

Исследование усредненной системы

Усредненные уравнения для медленных переменных ϕ_j имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho}_1 = -\epsilon b_{11}\rho_1 - \epsilon \frac{1}{\omega_1} (2cd_{21}F(a, b) + 3cd_{30}F(c, d) + \\ \quad + 2ad_{21}G(a, b) + 3ad_{30}G(c, d) + d_{12}H(c, d, a, b)) \\ \dot{\rho}_2 = -\epsilon b_{22}\rho_2 - \epsilon \frac{1}{\omega_2} (3bd_{03}F(a, b) + 2bd_{12}F(c, d) + \\ \quad + 3ad_{03}G(a, b) + 2ad_{12}G(c, d) + d_{21}H(a, b, c, d)) \end{array} \right. \quad (14)$$

$$F(a, b) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |a \sin(\phi_1) + b \sin(\phi_2)| \sin^2(\phi_1) d\phi_1 d\phi_2$$

$$G(a, b) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |a \sin(\phi_1) + b \sin(\phi_2)| \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) d\phi_1 d\phi_2$$

$$H(c, d, a, b) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(c \sin(\phi_1) + d \sin(\phi_2)) |a \sin(\phi_1) + b \sin(\phi_2)|^2 \sin(\phi_1) d\phi_1 d\phi_2$$

$$a = s_{21}\omega_1\rho_1, \quad b = s_{22}\omega_2\rho_2, \quad c = s_{11}\omega_1\rho_1, \quad d = s_{12}\omega_2\rho_2$$

Специальный случай функции Рэля

Пусть диссипативная функция Рэля имеет вид:

$$\Psi = \frac{\delta}{3}d_{30}|\dot{q}_1|^3 + \frac{\delta}{3}d_{03}|\dot{q}_2|^3$$

Тогда уравнения для медленных переменных усреднённой системы имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = -\epsilon \left(\frac{1}{2}b_{11}\rho_1 + \frac{4d_{30}\rho_1^2\omega_1}{3\pi} \right) \\ \dot{\rho}_2 = -\epsilon \left(\frac{1}{2}b_{22}\rho_2 + \frac{4d_{03}\rho_2^2\omega_2}{3\pi} \right) \end{cases} \quad (15)$$

Полученная усредненная система имеет четыре особые точки

$$\begin{aligned} \rho_1^* &= \rho_2^* = 0 \\ \rho_1^* &= -\frac{3\pi b_{11}}{8d_{30}\omega_1}, \quad \rho_2^* = 0 \\ \rho_1^* &= 0, \quad \rho_2^* = -\frac{3\pi b_{22}}{8d_{03}\omega_{12}} \\ \rho_1^* &= -\frac{3\pi b_{11}}{8d_{30}\omega_1}, \quad \rho_2^* = -\frac{3\pi b_{22}}{8d_{03}\omega_{12}} \end{aligned}$$

Специальный случай функции Рэля

Для последней точки составим уравнения возмущенного движения, для чего введем возмущения по формуле $u_i = \rho_i - \rho_i^*$.

Имеем следующие уравнения возмущенного движения

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \frac{\epsilon}{2} b_{11} u_1 \\ \dot{u}_2 = \frac{\epsilon}{2} b_{22} u_2 \end{cases} \quad (16)$$

Таким образом, особая точка асимптотически устойчива, если

$b_{11} > 0$ и $b_{22} > 0$,

и неустойчива, если

$b_{11} b_{22} < 0$ [4, 5] или $b_{11} < 0, b_{22} < 0$.

[4] Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik, Ing. Arch, 20:1

[5] Байков А.Е. Предельный цикл в неконсервативной системе при резонансе 1:2: ПММ, 75:3 (2011), 384–395.

Инвариантный тор

Рассмотрим проекцию фазового портрета на двумерное конфигурационное пространство y_1, y_2 .

Выражения для быстрых переменных $\phi_i (i = 1, 2)$ имеют вид

$$\phi_1 = \omega_1 t + \phi_1^0, \quad \phi_2 = \omega_2 t + \phi_2^0$$

Фазовые переменные $y_i (i = 1, 2)$ представляются в виде

$$\begin{cases} y_1 = \rho_1^* \cos(\phi_1) \\ y_2 = \rho_2^* \cos(\phi_2) \\ \dot{y}_1 = -\omega_1 \rho_1^* \sin(\phi_1) \\ \dot{y}_2 = -\omega_2 \rho_2^* \sin(\phi_2) \end{cases} \quad (17)$$

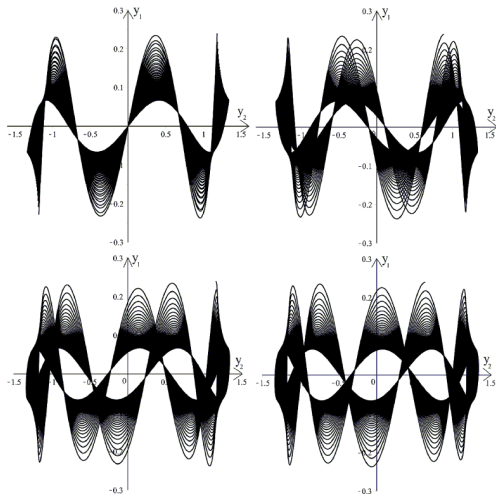
Без ограничения общности считаем, что $\phi_2^0 = 0$. Тогда проекция фазовой кривой на конфигурационное пространство представляет собой незамкнутую кривую Лиссажу

$$\begin{cases} y_1 = \rho_1^* \cos(\omega_1 t + \phi_1^0) \\ y_2 = \rho_2^* \cos(\omega_2 t) \end{cases} \quad (18)$$

Каждая траектория получается выбором начального угла ϕ_1^0 и всюду плотна на инвариантном торе.

Инвариантный тор

Тор образуется семейством траекторий в фазовом пространстве системы (рис.1). Инвариантный тор существует, если $b_{11} \neq 0$, и $b_{22} \neq 0$.



Исследуемая модель механической системы

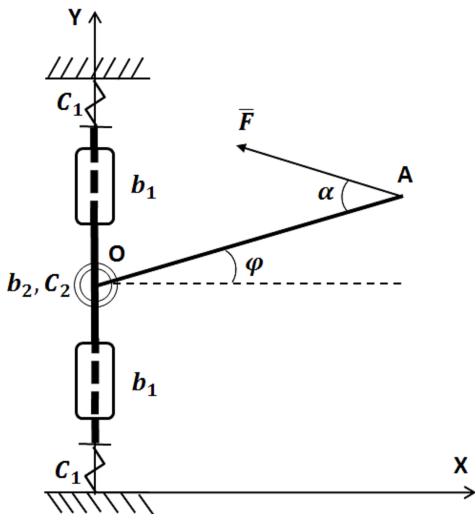


Рис. Исследуемая модель

Уравнения движения

Уравнения Лагранжа исследуемой системы имеют вид

$$\begin{cases} 2m\ddot{y} + \frac{1}{2}ml\ddot{\phi} \cos(\phi) - \frac{1}{2}ml\dot{\phi}^2 \sin(\phi) = -2c_1y - 2b_1\dot{y} - k|\dot{y}|^2 \operatorname{sgn}(\dot{y}) + F \sin(\alpha - \phi) \\ \frac{1}{3}ml^2\ddot{\phi} + \frac{1}{2}ml\ddot{y} \cos(\phi) = -c_2\phi - b_2\dot{\phi} + Fl \sin(\alpha) \end{cases} \quad (19)$$

Положение равновесия системы находится из системы

$$\begin{cases} 2c_1y + F \sin(\alpha - \phi) = 0 \\ c_2\phi + Fl \sin(\alpha) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

и имеет вид

$$y^* = \frac{F}{2c_1} \sin\left(\alpha - \frac{Fl}{c_2}\right), \quad \phi^* = \frac{Fl}{c_2} \sin(\alpha)$$

Введем обозначения:

$$\frac{Fl}{c_2} = \gamma, \quad \text{и } u = \gamma \sin(\alpha)$$

Уравнения возмущенного движения и обезразмеривание

Запишем уравнения возмущенного движения с помощью замены

$$y = y^* + \xi_1, \phi = \phi^* + \xi_2$$

$$\begin{cases} 2m\ddot{\xi}_1 + \frac{1}{2}ml\ddot{\xi}_2 \cos(u + \xi_2) - \frac{1}{2}ml\dot{\xi}_2^2 \sin(u + \xi_2) = -2c_1\xi_1 - 2b_1\dot{\xi}_1 - k|\dot{\xi}_1|^2 \operatorname{sgn}(\dot{\xi}_1) - \\ -F \sin(\alpha - u) + F \sin(\alpha - u - \xi_2) \\ \frac{1}{3}ml^2\ddot{\xi}_2 + \frac{1}{2}ml\ddot{\xi}_1 \cos(u + \xi_2) = -c_2\xi_2 - b_2\dot{\xi}_2 \end{cases} \quad (21)$$

Далее обезразмерим уравнение (21) и введем малый параметр ϵ и δ за счет относительной малости параметров. В качестве единицы угла будем использовать 1 рад. $t = \tau T^*$, $T^* = \sqrt{\left(\frac{m}{c_1}\right)}$, $\xi_1 = \theta_1 \xi_1^*$, $\xi_2 = \theta_2 \xi_2^* = \theta_2$, $\xi_1^* = l$.

Уравнения примут вид

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_2 \cos(u + \theta_2) - \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 \sin(u + \theta_2) = -2\theta_1 - \epsilon\beta_1\dot{\theta}_1 - \delta|\dot{\theta}_1|^2 \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_1) - \\ -F^* \sin(\alpha - u) + F^* \sin(\alpha - u - \theta_2) \\ \frac{1}{3}\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_1 \cos(u + \theta_2) = -\sigma\theta_2 - \epsilon\beta_2\dot{\theta}_2 \end{cases} \quad (22)$$

где введены следующие обозначения: $\sigma = \frac{c_2}{c_1 l^2}$, $F^* =$

$$\frac{F}{\sqrt{(mc_1)l}}, \delta = \frac{kl}{m}, \epsilon\beta_1 = \frac{2b_1}{\sqrt{(mc_1)}}, \epsilon\beta_2 = \frac{b_2}{\sqrt{(mc_1)l^2}}$$

Линеаризация уравнений движения

Линеаризованные уравнения движения в окрестности точки $\theta_1 = \theta_2 = 0$ имеют вид (для удобства $F^* = F$)

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{4}\ddot{\theta}_2 \cos(u) = -\theta_1 - \varepsilon\beta_1\dot{\theta}_1 - F \cos(\alpha - u)\theta_2 \\ \frac{1}{3}\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_1 \cos(u) = -\sigma\theta_2 - \varepsilon\beta_2\dot{\theta}_2 \end{cases} \quad (23)$$

Или в матричной форме

$$A\ddot{\theta} + \varepsilon B\dot{\theta} + C\theta = 0 \quad (24)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4}\cos(u) \\ \frac{1}{2}\cos(u) & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & F \cos(\alpha - u) \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (25)$$

Для исследования устойчивости положения равновесия рассмотрим характеристический полином системы, который имеет вид

$$\lambda^4 + \frac{-8\beta_1\varepsilon - 24\beta_2\varepsilon}{3\cos(u)^2 - 8}\lambda^3 + \frac{-24\beta_1\beta_2\varepsilon^2 + 12\cos(u)F \cos(-\alpha + u) - 24\sigma - 8}{3\cos(u)^2 - 8}\lambda^2 + \frac{-24\beta_1\varepsilon\sigma - 24\beta_2\varepsilon}{3 * \cos(u)^2 - 8}\lambda - \frac{24\sigma}{3 * \cos(u)^2 - 8} = 0$$

Исследование устойчивости в отсутствие сил трения

Будем исследовать устойчивость системы в так называемом случае Циглера ($\alpha = 0$) Для начало рассмотрим случай, когда $\varepsilon = 0$. Тогда характеристический полином примет вид

$$\lambda^4 + \left(\frac{24}{5} + \frac{8}{5} - \frac{12}{5}F \right) \lambda^2 + \frac{24}{25}\sigma \quad (27)$$

Исследовать систему будем методом, описанным, например, в [5].

С помощью замен вида $\lambda = i\omega$ и $\omega = \sqrt{(\mu)}$ характеристический полином приводится к виду

$$\mu^2 - \left(\frac{24}{5} + \frac{8}{5} - \frac{12}{5}F \right) \mu + \frac{24}{25}\sigma \quad (28)$$

Далее проводится анализ устойчивости с помощью теоремы, описанной в [5].

Основные результаты

- 1 В частном случае диссипативной функции Рэля получены условия существования предельного инвариантного тора для механических систем с двумя степенями свободы.
- 2 Рассмотрена модель механической системы, для которой получены условия устойчивости механической системы в отсутствие сил трения и при их наличии.
- 3 Построены зоны Циглера для различных значений параметров исследуемой системы.

Спасибо за внимание!