УДК 533.9.01

Возможности применения второго метода Ляпунова к исследованию устойчивости плазмы в тороидальных системах с магнитным удержанием

Галюзов А. А., Пустовитов В. Д
Московский физико-технический институт (государственный университет)
НИЦ «Курчатовский институт»

В теории МГД-устойчивости («МГД» – магнитная гидродинамика) возмущение плазмы при наличии ее равновесного течения с массовой скоростью $\mathbf{V}_0$ описывается уравнением [1, 2-4]

$$\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}_0\cdot\nabla\right)^2\boldsymbol{\xi}=\mathbf{F}_S(\boldsymbol{\xi})+\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\xi}\rho_0(\mathbf{V}_0\cdot\nabla)\mathbf{V}_0\right) \tag{1}$$

с

$$\mathbf{F}_S(\boldsymbol{\xi})=\nabla\left[\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla p_0+\Gamma p_0(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi})-\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{b}\right]+(\mathbf{B}_0\cdot\nabla)\mathbf{b}+(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{B}_0 \tag{2}$$

– объемной плотностью силы, действующей на плазму, выведенную из положения статического равновесия. Здесь и далее ρ – плотность плазмы, p – её давление, нижний индекс «0/1» означает равновесное значение/возмущение физической величины, магнитное поле представляется в виде

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_0(\mathbf{r})+\mathbf{b}(\mathbf{r},t),$$

где $\mathbf{b}$ – возмущение, $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)=\Delta_L\mathbf{r}$ – лагранжев вектор смещения жидкой частицы (в МГД плазма рассматривается как сплошная среда – проводящая жидкость), а оператор возмущения физической величины $f(\mathbf{r},t)$ в представлении Лагранжа определяется как

$$\Delta_L f = f(\mathbf{r}+\boldsymbol{\xi})-f_0(\mathbf{r}),$$

т. е. показывает смещение жидкой частицы, находившейся бы в невозмущенном потоке в момент времени t в точке $\mathbf{r}$, от этого положения в тот же момент времени. Причем в линейном приближении по малому параметру $\boldsymbol{\xi}$

$$\Delta_L f=\delta f+(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)f_0,$$

где

$$\delta f = f(\mathbf{r})-f_0(\mathbf{r})$$

есть возмущение физической величины в представлении Эйлера.

В [1] утверждалось, что для тороидальной плазмы, окруженной на некотором расстоянии проводящей стенкой, следствием (1) является соотношение

$$\frac{d(K+W)}{dt}=-\left(\sigma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)_{oR} \tag{3}$$

в котором

$$K\equiv\frac{1}{2}\int\limits_{V_{pl}}\rho_0\left(\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t}\right)^2 dV, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}W\equiv{}&\frac{1}{2}\int\limits_{V_{pl}}\rho_0\boldsymbol{\xi}\cdot(\mathbf{V}_0\cdot\nabla)^2\boldsymbol{\xi}dV-\frac{1}{2}\int\limits_{V_{pl}}\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\xi}\rho_0(\mathbf{V}_0\cdot\nabla)\mathbf{V}_0\right)dV-\\&-\frac{1}{2}\int\limits_{V_{pl}}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{F}_S(\boldsymbol{\xi})dV+\frac{1}{2}\int\limits_{oR}\mathbf{A}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}dV,\end{aligned} \tag{5}$$

«скалярное произведение» векторов $(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\mu})_{oR}$ в (3) определяется как

$$(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\mu})_{oR}\equiv\int\limits_{\substack{outer\\region}}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\mu}dV,$$

где oR – «*outer region*» – обозначает все пространство вне объема V_{pl}, занимаемого плазмой, σ – проводимость стенки (отлична от нуля в стенке и равна нулю в вакууме), а $\mathbf{A}$ – вектор-потенциал возмущения электрического и магнитного поля снаружи от плазмы; они выражаются через него как

$$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{A},$$

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Для $\mathbf{A}$ справедливо уравнение

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{6}$$

получаемое объединением закона Ома $\mathbf{j}_1 = \sigma \mathbf{E}_1$ с записанным для возмущения уравнением Максвелла $\mathbf{j}_1 = \nabla \times \mathbf{b}$.

Равенство (3) использовалось в [1] для доказательства главного вывода той работы, что «в отсутствие диссипативных явлений, таких как вязкость, ожидается, что течение не может стабилизировать» плазму, окруженную проводящей стенкой и удерживаемую магнитным полем. Но последнее противоречит результатам работ [5, 6], где было показано, что вращение плазмы в токамаке с резистивной стенкой существенно положительно влияет на устойчивость плазменного разряда относительно его малых возмущений. Поэтому нашей целью будет являться проверка достоверности результатов и выводов работы [1].

В [1] утверждалось, что, «скалярно умножив уравнения (1) на $\dfrac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}$ и (6) на $\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ и интегрируя их по объему плазмы и всему пространству вне плазмы соответственно, сложив полученные соотношения, мы получим» (3). После этих слов в [1] сразу приводится (3), а выкладки и какое-либо доказательство отсутствуют. Поэтому нашей задачей будет строгий вывод (3) и проверка его справедливости, либо, если окажется, что оно неверно, получение верного соотношения вместо (3).

Покажем сначала, что при строгом подходе и естественном условии

$$\mathbf{n}_{pl} \cdot \mathbf{V}_0 \Big|_{S_{pl}} = 0 \tag{7}$$

на поверхности плазмы из (1) вместо (3) должно получаться соотношение

$$\frac{d(K+W)}{dt} + \delta X = -\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_{oR}, \tag{8}$$

где в общем случае $\delta X \neq 0$.

Проще всего можно получить соотношение (8) следующим образом. Сперва умножим (1) на $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\xi}$, а затем проинтегрируем по невозмущенному объему плазмы V_{pl}. В результате этих действий получается соотношение

$$K + W + \frac{1}{2}\int_{V_{pl}} \rho_0 \left[\boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}\right)^2\right] dV + v\left(\boldsymbol{\xi}, \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}\int_{oR} \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} dV = 0, \tag{9}$$

где K и W – величины (4) и (5), а

$$v\left(\boldsymbol{\xi}, \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}\right) \equiv \int_{V_{pl}} \rho_0 \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} dV. \tag{10}$$

Преобразуем два последних слагаемых в (9). Уравнение непрерывности для стационарной конфигурации плазмы с $\partial \rho_0 / \partial t = 0$ дает

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{V}_0) = 0, \tag{11}$$

благодаря чему и условию (7) на поверхности плазмы будет выполняться

$$\frac{d}{dt}v\left(\xi,\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)-\int\limits_{V_{pl}}\rho_0\xi\cdot(\mathbf{V}_0\cdot\nabla)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}dV=$$

$$=\int\limits_{V_{pl}}\rho_0\frac{\partial\xi}{\partial t}\cdot(\mathbf{V}_0\cdot\nabla)\frac{\partial\xi}{\partial t}dV=\int\limits_{V_{pl}}\nabla\cdot\left[\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{V}_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2\right]dV-\tag{12}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{V_{pl}}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2(\nabla\cdot\rho_0\mathbf{V}_0)dV=\frac{1}{2}\int\limits_{S_{pl}}\rho_0(\mathbf{n}_{pl}\cdot\mathbf{V}_0)\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2dS=0.$$

Таким образом, при условиях (7) и (11)

$$\frac{d}{dt}v\left(\xi,\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)=\int\limits_{V_{pl}}\rho_0\xi\cdot(\mathbf{V}_0\cdot\nabla)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}dV\,.\tag{13}$$

Последний интеграл в (9) в силу (6) преобразуется к виду

$$\int\limits_{oR}\mathbf{A}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}dV=-\int\limits_{wall}\sigma\mathbf{A}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}dV\,.\tag{14}$$

С учетом выражений (13), (14) при дифференцировании (9) по времени мы получим соотношение (8) с

$$\delta X=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int\limits_{V_{pl}}\rho_0\left[\xi\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2\right]dV+\int\limits_{V_{pl}}\rho_0\xi\cdot(\mathbf{V}_0\cdot\nabla)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}dV+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{wall}\sigma\left[\mathbf{A}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)^2\right]dV.\tag{15}$$

Легко видеть, что $\delta X=0$ при

$$\xi,\mathbf{A}\propto\exp(\gamma t),\tag{16}$$

где γ – в общем случае комплексный инкремент возмущения. Тогда наше уравнение (8) действительно сводится к (3) из [1].

Однако при

$$\xi=\xi_1(\mathbf{r})\exp(\gamma_1 t)+\xi_2(\mathbf{r})\exp(\gamma_2 t),\tag{17}$$

как несложно проверить подстановкой (17) в (15), результат (3) из [1] будет отличаться от правильного результата (8) на δX, равное

$$\delta X\exp(-(\gamma_1+\gamma_2)t)=\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{2}\left[(\gamma_1+\gamma_2)\int\limits_{V_{pl}}\rho_0(\xi_1\cdot\xi_2)dV+\int\limits_{wall}\sigma(\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2)dV\right]+$$

$$+(\gamma_2^2-\gamma_1^2)\int\limits_{V_{pl}}\rho_0\xi_1\cdot(\mathbf{V}_0\cdot\nabla)\xi_2 dV\neq 0\quad \text{при}\ \gamma_1\neq\gamma_2,\tag{18}$$

где использованы условия (7) и (11), благодаря которым выполняется

$$\int\limits_{V_{pl}}\xi_2\cdot(\rho_0\mathbf{V}_0\cdot\nabla)\xi_1 dV=\int\limits_{V_{pl}}(\rho_0\mathbf{V}_0\cdot\nabla)(\xi_1\cdot\xi_2)dV-\int\limits_{V_{pl}}\xi_1\cdot(\rho_0\mathbf{V}_0\cdot\nabla)\xi_2 dV=$$

$$=\int\limits_{S_{pl}}\rho_0\underbrace{(\mathbf{V}_0\cdot d\mathbf{S}_{pl})}_{=0}(\xi_1\cdot\xi_2)-\int\limits_{V_{pl}}\underbrace{(\nabla\cdot\rho_0\mathbf{V}_0)}_{=0}(\xi_1\cdot\xi_2)dV-\int\limits_{V_{pl}}\xi_1\cdot(\rho_0\mathbf{V}_0\cdot\nabla)\xi_2 dV=-\int\limits_{V_{pl}}\xi_1\cdot(\rho_0\mathbf{V}_0\cdot\nabla)\xi_2 dV.$$

Если $\gamma_1=(k+1)\gamma_k,\quad k\in R,\ \gamma_2=\gamma_k$ и $\xi_1=\xi_2=\xi_k$, $\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_k$, (18) примет вид

$$\delta X\exp(-(k+2)\gamma_k t)=\frac{k^2\gamma_k^2}{2}\left[(k+2)\gamma_k\int\limits_{V_{pl}}\rho_0|\xi_k|^2dV+\int\limits_{wall}\sigma|\mathbf{A}_k|^2dV\right]\neq 0,$$

и если $k > 0$, для (8) при $k \ge 3$ и $\gamma_k > 0$ получаем $\delta X > \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_{oR}$. Это означает, что в случае возмущения (17) результат (3) из [1] неприменим.

Далее, рассмотрим ***тороидально вращающееся*** возмущение вида

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_1^{re}(\zeta, \theta)\exp(\gamma_R t)\cos(\omega t - n\zeta) \tag{19}$$

где ζ и θ – тороидальный и полоидальный углы, инкремент возмущения имеет вид

$$\gamma = \gamma_R + i\omega,$$

а ω – угловая скорость ***тороидального вращения*** возмущения, в общем случае комплексная. Мы работаем в квазицилиндрических координатах (r, ζ, θ), где r и θ – полярные координаты в поперечном сечении плазмы с центром на магнитной оси, $\zeta = 2\pi R_0$ – аналог тороидального угла, а R_0 – длина соответствующего тору цилиндра в цилиндрической системе координат. Тороидально вращающееся возмущение (19) имеет вид

$$\boldsymbol{\xi}^{\omega} = \boldsymbol{\xi}_0(r, \theta)\exp(\gamma_R t)\cos(\omega t - n\zeta), \ \mathbf{A}^{\omega} = \mathbf{A}_0(r, \theta)\exp(\gamma_R t)\cos(\omega t - n\zeta). \tag{20}$$

Рассматривая аксиально-симметричную конфигурацию плазмы и считая постоянной скорость ***тороидального вращения*** плазмы V_0, подставим возмущение вида (20) в (15) и получим

$$\delta X = -\exp(2\gamma_R t)\pi\omega^2 \left[2\gamma_R \int_{S_\perp^{pl}} \rho_0 |\boldsymbol{\xi}_0|^2 \left\{ 1 - \frac{nV_0}{\omega R} \right\} dS_\perp^{pl} + \int_{S_\perp^{wall}} \sigma |\mathbf{A}_0|^2 dS_\perp^{wall} \right], \tag{21}$$

в общем случае отличное от нуля. Здесь $R = R_0 + r\cos\theta$, а $S_\perp^{pl}(S_\perp^{wall})$ – поперечное сечение тороидальной плазмы (стенки). В то же время правая часть (3) при подстановке в нее (20) будет равна

$$-\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_{oR} = -\exp(2\gamma_R t)\pi\left(\gamma_R^2 + \omega^2\right) \int_{S_\perp^{wall}} \sigma |\mathbf{A}_0|^2 dS_\perp^{wall}. \tag{22}$$

В наиболее интересном для нас случае плазмы, находящейся на границе своей устойчивости, когда $\gamma_R = 0$, выражение (21) принимает вид

$$\delta X = -\pi\omega^2 \int_{S_\perp^{wall}} \sigma |\mathbf{A}_0|^2 dS_\perp^{wall},$$

а (22) –

$$-\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_{oR} = -\pi\omega^2 \int_{S_\perp^{wall}} \sigma |\mathbf{A}_0|^2 dS_\perp^{wall},$$

т. е. при чисто вращающемся возмущении

$$\boldsymbol{\xi}^{\omega} = \boldsymbol{\xi}_0(r, \theta)\cos(\omega t - n\zeta), \quad \mathbf{A}^{\omega} = \mathbf{A}_0(r, \theta)\cos(\omega t - n\zeta)$$

неучтенное в [1] слагаемое δX становится равным правой части (3) $-\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_{oR}$:

$$\delta X = -\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_{oR} \quad \textit{при } \gamma_R = 0,$$

и вместо соотношения (3) из работы [1] в данном конкретном случае должно получаться уравнение

$$\frac{d(K + W)}{dt} = 0.$$

В [1] для исследования устойчивости плазмы предлагалось применять второй метод Ляпунова к уравнению (3). Мы только что показали, что (3) в общем случае неверно. Поэтому рассмотрим правильное уравнение (8) и выясним, применим ли второй метод Ляпунова к исследованию устойчивости положений равновесия (8) относительно малых возмущений.

Применение второго метода Ляпунова основано на использовании функции Ляпунова $f_L = f_L(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{A})$. По определению [35], функция Ляпунова f_L автономной системы дифференциальных уравнений (с помощью замен уравнение (1) можно представить в виде автономной системы дифференциальных уравнений) должна удовлетворять следующим условиям:

1. быть непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности U положения равновесия системы $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \mathbf{A} = \mathbf{0}$;
2. $f_L(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0$ и $f_L(U) > 0$ за исключением $\{\mathbf{0},\mathbf{0}\}$; (23)
3. в U должно выполняться $\dfrac{df_L}{dt} \le 0$.

Если выполнены вышеперечисленные условия определения, то согласно второму методу Ляпунова положение равновесия $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ уравнения (8) при

- $\left.\dfrac{df_L}{dt}\right|_U = 0$ устойчиво по Ляпунову
- $\left.\dfrac{df_L}{dt}\right|_U < 0$ асимтотически устойчиво.

Чтобы буквально следовать процедуре доказательства работы [1], занесем δX в (8) под знак производной

$$\frac{d\left(K + W + \int \delta X dt\right)}{dt} = -\int_{wall} \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2 dV,$$

в результате чего получим уравнение

$$\frac{dH}{dt} = -\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_{oR},$$

где

$$H(t) = K + W + \frac{1}{2}\int_{V_{pl}} \rho_0 \left[\boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}\right)^2\right] dV + \frac{1}{2}\int_{wall} \sigma \left[\mathbf{A} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2\right] dV + \int_{V_{pl}} \rho_0 \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} dV.$$

Про знак H в общем случае ничего сказать нельзя. Поэтому можно заключить только то, что если есть такая окрестность положения равновесия, где $H > 0$ и

$$\left.\frac{dH}{dt}\right|_U \le 0, \tag{29}$$

то $f_L = H$ и положение равновесия устойчиво по Ляпунову либо асимптотически устойчиво (определяется знаком $<$ либо $=$ в (23)), если же нет, то – неустойчиво.

Итак, показано, что выражение (3), справедливое для возмущений вида $\boldsymbol{\xi}, \mathbf{A} \propto \exp(\gamma t)$, в общем случае произвольного возмущения неверно, и вместо него следует использовать правильное соотношение (8) с δX, определенным (15).

Заключение

В данной работе проверялось утверждение [1] о том, что «в отсутствие диссипативных явлений, таких как вязкость и т. п., ожидается, что течение не может стабилизировать» плазму, окруженную проводящей стенкой и удерживаемую магнитным полем. Было выяснено, что соотношение энергетического баланса (3), приведенное в [1], в общем случае произвольного возмущения неверно, и вместо него выполняется (8). Это приводит к тому, что и основной вывод работы [1], построенный на неправильных предпосылках, не подтверждается, а скорее опровергается верным соотношением (8). Ведь из выражения (42)

$$\gamma_R = \gamma_R^{ld}(1-(\gamma_I/n\omega_{cr})^2,$$

полученного в [8] для сильного скин-эффекта в стенке вакуумной камеры токамака, где мнимая часть инкремента возмущения $\gamma_I \neq 0$, n – тороидальное волновое число, а γ_R^{ld} и ω_{cr} определяются параметрами плазмы, следует, что в условиях сильного скин-эффекта в стенке возможно стабилизировать плазму относительно её малых возмущений $\propto \exp(\gamma t)$, а результаты нашей работы [9] как раз и говорят о том, что равновесное вращение идеальной плазмы может привносить в инкремент мнимую добавку $i\gamma_I \neq 0$. Следовательно, можно ожидать, что тороидальное вращение плазмы в токамаке совместно с резистивностью стенки вакуумной камеры может приводить к стабилизации плазменных неустойчивостей.

Литература

1. *Tasso H., Throumoupoulos G.N.* Lyapunov stability of flowing plasmas surrounded by resistive walls. – Phys. Plasmas. – 2011. – V. 18. – P. 070702.

2. *Smith S. P.*. Magnetohydrodynamic Stability Spectrum with Flow and a Resistive Wall. A dissertation presented to the faculty of Princeton University in candidacy for the degree of Doctor of Philosophy presented to the faculty of Princeton University in candidacy for the degree of Doctor of Philosophy. 2010, January.

3. *Frieman E. and Rotenberg M.* On hydromagnetic stability of stationary equilibria. – Reviews of modern physics. – V. 32. – Number 4. – October, 1960.

4. *Hoverkort J. W.*. Magnetohydrodynamic Waves and Instabilities in Rotating Tokamak Plasmas. Doctor's dissertation, defended at the Eindhoven University of Technology, 2013.

5. *Shiraishi J., Aiba N., Miyato N. and Yagi M.* Effects of centrifugal modification of magnetohydrodynamic equilibrium on resistive wall mode stability. – Nuclear Fusion. – 2014 – V. 54. – P. 083008.

6. *Aiba N., Shiraishi J., and Tokuda S.* Impact of plasma poloidal rotation on resistive wall mode instability in toroidally rotating plasma. – Physics of Plasmas. – 2011. – V. 18. – P. 022503.

7. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – 2-е изд. – М.: Лаборатория базовых знаний. – 2001. – С. 247.

8. *V. D. Pustovitov.* Thick-wall effects on the rotational stabilization of resistive wall modes in tokamaks. – Nuclear Fusion. – 2013 – V. 53. – P. 033001.

9. A. A. Galyuzov and V.D. Pustovitov, Properties of the MHD force operator in the presence of a resistive wall, in 43rd EPS Conference on Plasma Physics, Leuven, July 4–8, 2016, ECA, P4.075 http://ocs.ciemat.es/EPS2016ABS/pdf/P2.034.pdf