

**Стохастическая модель фазового  
перехода в конденсированных средах: уравнения с симметризованной  
нелинейностью**

Т.А.Морозова<sup>1</sup>, Г.И.Змиевская<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет)

<sup>2</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Рассмотрено поведение стохастической системы генератора Ван-дер-Поля при наличии шума, симметризованного по нелинейности. Анализ проводился двумя различными подходами: с помощью кинетического уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова для плотности переходной вероятности (кинетической функции распределения  $f(x, V, t)$ , где  $x$  - координата,  $V$  - скорость,  $t$  - время) и уравнением стохастического аналога модели, стохастическим дифференциальным уравнением Ито[1]. Модель позволяет рассмотреть процесс фазового перехода в конденсированной среде с точки зрения анализа поведения стохастических динамических переменных ( $x, V$ ) при изменении соотношения физических величин, которыми характеризуется фазовый переход:  $\alpha, \beta, \gamma, E_0$  - коэффициентах обратной связи, линейного и нелинейного трения, начальной энергии. В работе также рассмотрена зависимость поведения системы от коэффициента диффузии при фиксированных значениях  $\alpha, \beta, \gamma, E_0$ .

Уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) для  $f$  в частных производных

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x,t) f(x,t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} b_{ij}(x,t) f(x,t) \quad (1)$$

соответствуют уравнения стохастического аналога для  $x(t), V(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}(-a + bE)x &= v, \\ \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}(-a + bE)v + \omega_0^2 x &= \tilde{y}_v(t) \end{aligned} \quad (2)$$

$$X|_{t=0} = X_0$$

Используя факт симметризованности по нелинейности системы, можно перейти в уравнениях от координат  $x$  и  $V$  к энергии  $E(t)$ , после чего оба уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial f(E,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial E} \left( D(E) E \frac{\partial f}{\partial E} \right) + \frac{\partial}{\partial E} [(-\alpha + \beta E) E f], \quad (3)$$

$$\text{Где } D(E) = D \left( 1 + \frac{\beta}{\gamma} E \right), \quad D = \gamma kT,$$

$$\frac{dE}{dt} + (-\alpha + bE)E - \frac{1}{2} \frac{d}{dE} [D(E)E] = \sqrt{D(E)E} \tilde{y}(t) \quad (4)$$

На рис. 1 а и 1 б по траекториям случайного процесса  $E(t)$  построены поверхности равных значений функций распределения  $f(E,t)$ , нормированной на единицу для двух случаев развития стохастических процессов, моделируемых ФПК (1). Его решение заменено системой СДУ, которыми описана модель фазового перехода в форме генератора Ван-дер-Поля с учетом шума[2,3].

Решение СДУ(3) проводилось методом Эйлера 1-го порядка с шагом по времени 0.005 с на массиве  $2^{18}$  траекторий, а также с моделью шума, использующего генератор нормально распределенных случайных величин в модели винеровского случайного процесса  $W(t)$  в (2). Для дополнительного анализа выбирались 5 случайных траекторий для традиционного анализа динамики осциллирующей системы, после чего проводилось усреднение по всем ям с тем, чтобы найти  $f(E,t)$  как вероятность обнаружить значения  $E(t)$  в интервале значений динамической переменной  $[E, E+\delta E]$  и построить графики функции распределения  $f(E,t)$ .

Зависимость коэффициента диффузии от энергии приводит к более медленному убыванию функции распределения при больших значениях энергии. Таким образом, «хвосты» распределений существенно различны. Однако положения максимумов распределений одинаковы:

$$E_{max} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ при } \alpha > 0,$$

$E_{max} = 0$ , при  $\alpha < 0$  для стационарных распределений

При изменении  $\alpha$  существенно меняется характер временной эволюции системы. При  $\alpha < 0$  система переходит в состояние покоя с  $E = 0$ , а при  $\alpha > 0$  устанавливается стационарное колебание с частотой  $\omega$  и с энергией предельного цикла  $E = \frac{\alpha}{\beta}$ . Получено, что  $\alpha=0$  точка бифуркации. В пределе  $\alpha=0$  зависимость  $E(t) \propto \frac{1}{t}$ , в связи с чем пропадает зависимость от начальной энергии.

Работа выполнена при частичном финансировании грантом РФФИ 15-01-05052а.

Работа выполнена при частичном финансировании грантом РФФИ 16-01-00342а.

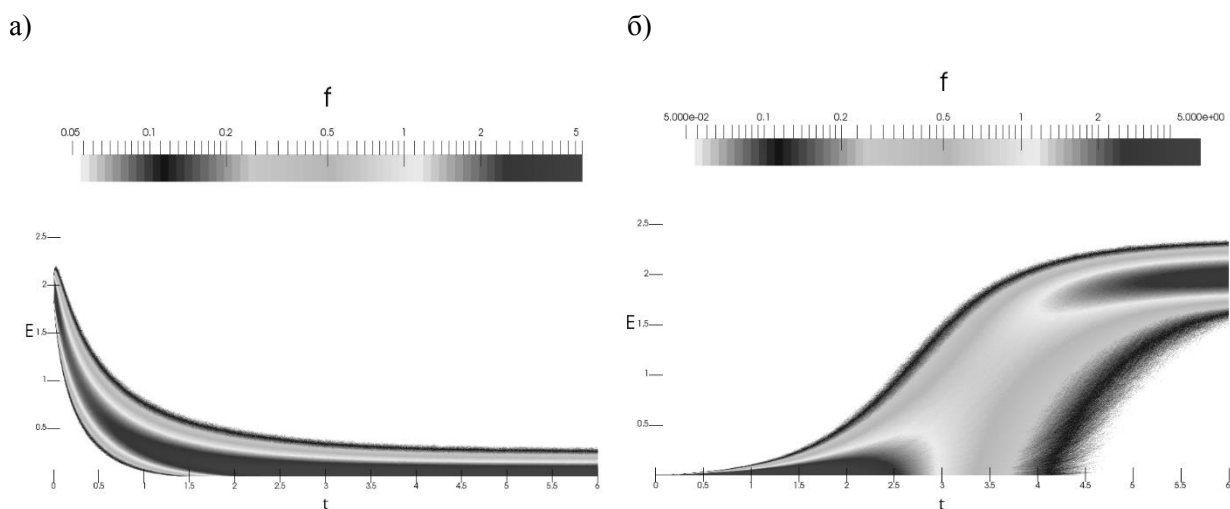


Рис.1. Функции распределения для различных параметров обратной связи  $\alpha$ ,  $\alpha = -1$  (а) и  $\alpha = 2$  (б), при прочих постоянных коэффициентах

### Литература

Змиевская Г. И. Стохастическое моделирование неравновесных процессов // Будущее прикладной математики. Лекции для молодых ученых: от идей к технологиям /Под ред. Г. Г. Малинецкого. М.: КомКнига/URSS, 2008. С. 255–330.

В.С. Анищенко. Знакомство с нелинейной динамикой. Саратов: ГосУНЦ «Колледж», Саратов.ун-т, 2002. 171 с.

В.С.Анищенко, Т.Е.Вадивасова, В.С.Маляев. Применение концепции стохастического аттрактора для исследования динамических систем в присутствии шума. // Актуальные проблемы статистической радиофизики. 2005. Т.4. С.14

Ю.Л. Климонтович. Критерий относительной степени упорядоченности открытых систем. // Успехи физических наук. 1996. Т.166, №11. С.1231-1243