

## **GaAs резонатор в качестве пассивного стандарта частоты**

*Н.О. Жаднов<sup>1,2,3</sup>, А.В. Масалов<sup>2</sup>, К.Ю. Хабарова<sup>2,3</sup>, Н.Н. Колачевский<sup>2,3</sup>, В.Н. Сорокин<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет)

<sup>2</sup>Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН

<sup>3</sup>Российский квантовый центр

Предельно высокая стабильность частоты современных лазерных источников ( $\Delta\omega/\omega: 10^{-18}$ ) достигается с использованием «привязки» их излучения к линиям оптических переходов в атомах или ионах, охлаждаемых в ловушках с помощью набора дополнительных лазеров. Довольно высокие габариты ( $> 1 \text{ м}^3$ ), вес ( $> 100 \text{ кг}$ ) и энергопотребление ( $> 1 \text{ кВт}$ ) таких источников частотно-стабилизированного излучения ограничивают круг их применения установками лабораторного типа. Для широкого круга применений (телекоммуникация, гравиметрия и др.) в настоящее время разрабатываются лазерные источники, стабилизированные по частотам микроволновых или оптических резонаторов. Их массогабаритные характеристики и энергопотребление более привлекательны для создания транспортируемых и мобильных стандартов частоты.

В оптическом диапазоне длин волн наилучшие результаты по стабилизации частоты путем привязки лазерного излучения к резонансам пропускания интерферометра Фабри-Перо достигнуты с интерферометром, корпус которого изготовлен из кристаллического кремния, а зеркала из слоев GaAs-AlGaAs на кремниевых подложках. Данная система обеспечивает относительную стабильность частоты  $10^{-16}$  на интервалах времени усреднения 1-1000 с и более. Рабочая температура корпуса резонатора  $124^\circ\text{K}$  ( $-149^\circ\text{C}$ ) задана условием равенства нулю коэффициента теплового расширения кремния. Многослойные покрытия GaAs-AlGaAs зеркал обеспечивают высокие коэффициенты отражения и превосходные прочностные характеристики из-за совпадения размеров кристаллических решеток чередующихся слоев. Стабильность частоты кремниевого резонатора с GaAs-AlGaAs зеркалами ограничена тепловыми шумами механических колебаний кремниевого корпуса, подложек зеркал и их покрытий. Расчет вклада тепловых шумов в предельную стабильность резонансов данного интерферометра показывает, что основной вклад в шумы вносит многослойное покрытие отражающих зеркал резонатора.

В данной работе представлен анализ тепловых механических шумов интерферометра Фабри-Перо, корпус которого и подложки для зеркал

изготовлены из кристаллического арсенида галлия. Речь идет о создании репера частоты для телекоммуникационного диапазона с длиной волны 1,5 мкм. Преимущества данной конструкции связаны с двумя факторами: с понижением рабочей температуры до 56°K (*i*), что влечет за собой снижение уровня тепловых шумов, и с упрощением технологии нанесения многослойных покрытий на подложку (*ii*). Если при использовании кремниевых подложек нанесение GaAs-AlGaAs слоев осуществляется перенесением готовой многослойной структуры на кремниевую подложку с помощью специальной технологии, то использование GaAs подложки в этой технологии не нуждается. Далее представлены расчеты вкладов тепловых шумов в предельную частотную стабильность резонансов интерферометра Фабри-Перо, изготовленного из GaAs материалов. В расчетных формулах оценивается низкочастотное крыло спектра тепловых шумов. Действительно, самый низкочастотный резонанс механических колебаний интерферометра представляет собой основное колебание корпуса Фабри\_Перо  $\sim (6000 \text{ м/с}) / (2 \times 0.2 \text{ м}) = 15 \text{ кГц}$ , а при интервалах времени усреднения 1-1000 с актуальна только спектральная плотность шумов в субгерцовой области. Согласно флуктуационно-диссипационной теореме спектр тепловых шумов механической системы пропорционален мнимой части отклика резонансных колебаний на механическое возмущение заданной частоты. Поскольку полный расчет набора резонансов механической системы Фабри-Перо (с учетом их влияния на длину интерферометра) громоздок, будем вслед за /K.Numata et al. PRL, 2004/ использовать феноменологические оценочные формулы, в которых совокупность резонансов учитывается интегрально. Подобные формулы для различных элементов конструкции Фабри-Перо – корпуса, подложек зеркал и отражающих многослойных покрытий – содержат обобщающий феноменологический параметр: фактор механических потерь  $\phi$  (loss angle, mechanical loss), равный обратной добротности  $Q$  механических колебаний элементов интерферометра:  $Q = 1/\phi$ . Подразумевается, что оба этих параметра не зависят от частоты колебаний (по крайней мере, в низкочастотной части спектра тепловых шумов), а добротность  $Q$  может быть независимо измерена для отдельных частей и интерферометра в целом. В указанных предположениях спектр тепловых шумов пропорционален абсолютной температуре  $T$  и фактору механических потерь  $\phi$ , и обратно-пропорционален частоте механических колебаний  $f$  и модулю Юнга  $E$  материала. Последнее обстоятельство связано с характером доминирующего механизма затухания механических колебаний в материале элементов конструкции – с так называемым «структурным» затуханием. Переход от кремния в качестве материала корпуса интерферометра и подложек зеркал к арсениду галлия не даёт прямого выигрыша во влиянии на уровень спектра тепловых шумов корпуса интерферометра и подложек зеркал из-за величины фактора

потерь  $\phi$ , который по оценкам на три порядка больше, чем у кремния. Ослабить роль этого фактора (на порядок) можно с переходом на рабочую температуру  $(8\div 12)^\circ\text{K}$ , при которой КТР GaAs также зануляется. Однако помимо вкладов корпуса интерферометра и подложек зеркал заметная доля теплового шума связана с шумом отражающего покрытия. Обратимся к оценкам вкладов тепловых шумов продольной координаты интерферометра от трех элементов конструкции интерферометра: корпуса, подложек для зеркал и отражающих покрытий. Для первых двух элементов будем использовать формулы из работы /К. Numata *et al*/. А для отражающих покрытий – из работы /D.R.M.Crooks *et al*/. Используемые в расчетах параметры представлены в таблице.

Параметр	Кремний, Si	Арсенид галлия, GaAs
Модуль Юнга $E$ , Па	$18.8 \cdot 10^{10}$	$8.6 \cdot 10^{10}$
Температура $T^\circ\text{K}$	124	56
Кэф. Пуассона $\sigma$	0.266	0.31
Фактор потерь $\phi$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2.5 \cdot 10^{-5}(*?)$

1. Для цилиндрического корпуса интерферометра длиной  $L$  и радиусом  $R$  имеем /К. Numata *et al*/:

$$S(f) = \frac{2kT}{\pi f} \cdot \frac{L}{3\pi R^2 E} \phi,$$

При  $L = 0.21$  м и  $R = 0.12$  м получаем:

для кремниевого резонатора

$$S(f) = 0.897 \cdot 10^{-40} \text{ м}^2/\text{Гц} @ f = 1 \text{ Гц};$$

$$\sqrt{S(1 \text{ Гц})} \approx 0.95 \cdot 10^{-20} \text{ м}/\sqrt{\text{Гц}};$$

для арсенид-галлиевого резонатора

$$S(f) = 22.1 \cdot 10^{-38} \text{ м}^2/\text{Гц} @ f = 1 \text{ Гц};$$

$$\sqrt{S(1 \text{ Гц})} \approx 4.70 \cdot 10^{-19} \text{ м}/\sqrt{\text{Гц}}.$$

2. Для подложки без отражающих покрытий имеем /К. Numata *et al*/:

$$S(f) = \frac{2kT}{\pi f} \cdot \frac{1 - \sigma^2}{\sqrt{\pi w E}} \phi$$

При радиусе светового пучка  $w = 0.25$  мм получаем:

для кремниевой подложки

$$S(f) = 12.2 \cdot 10^{-38} \text{ м}^2/\text{Гц} @ f = 1 \text{ Гц};$$

$$\sqrt{S(1 \text{ Гц})} \approx 3.49 \cdot 10^{-19} \text{ м}/\sqrt{\text{Гц}};$$

для арсенид-галлиевой подложки

$$S(f) = 2.92 \cdot 10^{-34} \text{ м}^2/\text{Гц} @ f = 1 \text{ Гц};$$

$$\sqrt{S(1 \text{ Гц})} \approx 1.71 \cdot 10^{-17} \text{ м}/\sqrt{\text{Гц}}.$$

3. Для вклада покрытия по «уточненной» формуле /D.R.M.Crooks *et al*/ имеем:

$$S'(f) = \frac{2kT}{\pi^2 f} \cdot \frac{d}{Ew^2} \times \frac{\phi' E'}{E} \cdot \frac{1+\sigma}{1-\sigma'} \left[ (1-2\sigma') \frac{1+\sigma'}{1+\sigma} + (1-2\sigma)^2 \frac{1+\sigma}{1+\sigma'} \right],$$

где штрихованные величины относятся к покрытию, причем приходится принять  $\phi' = \phi$ . При толщине покрытия  $d = 50$  мкм и радиусе светового пучка  $w = 0.25$  мм получаем:

для покрытия на кремниевой подложке

$$\sigma = 0.266, \quad E = 18.8 \cdot 10^{10} \text{ Па},$$

$$\phi = 10^{-8} \text{ и } \sigma' = 0.402 (?), \quad E' = 8.36 \cdot 10^{10} \text{ Па} (?), \quad \phi' = 2.5 \cdot 10^{-5}$$

$$S(f) = 14.4 \cdot 10^{-36} \text{ м}^2/\text{Гц} @ f = 1 \text{ Гц};$$

$$\sqrt{S(1 \text{ Гц})} \approx 3.80 \cdot 10^{-18} \text{ м}/\sqrt{\text{Гц}};$$

для покрытия на арсенид-галлиевой подложке

$$\sigma = 0.31, \quad E = 8.6 \cdot 10^{10} \text{ Па},$$

$$\phi = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ и } \sigma' = 0.402 (?), \quad E' = 8.36 \cdot 10^{10} \text{ Па} (?), \quad \phi' = 2.5 \cdot 10^{-5}$$

получаем:

$$S(f) = 26.8 \cdot 10^{-36} \text{ м}^2/\text{Гц} @ f = 1 \text{ Гц};$$

$$\sqrt{S(1 \text{ Гц})} \approx 5.18 \cdot 10^{-18} \text{ м}/\sqrt{\text{Гц}}.$$

Баланс вкладов шумов в общий тепловой шум представлен в таблице.

Материал корпуса и подложек	Корпус м <sup>2</sup> /Гц	Подложки 2 шт. м <sup>2</sup> /Гц	Покрытия 2 шт. м <sup>2</sup> /Гц	Сумма м <sup>2</sup> /Гц	Стаб. частоты, Гц <sup>-1/2</sup>
Si	0.90·10 <sup>-40</sup> ~0.0003%	2.4·10 <sup>-37</sup> 0.8%	2.9·10 <sup>-35</sup> 99.2%	2.92·10 <sup>-35</sup>	2.6·10 <sup>-17</sup>
GaAs	2.2·10 <sup>-37</sup> ~0.035%	5.8·10 <sup>-34</sup> 91.5%	5.4·10 <sup>-35</sup> 8.5%	6.34·10 <sup>-34</sup>	1.2·10 <sup>-16</sup>

В последнем столбце таблицы приведены значения частотной стабильности интерферометра, рассчитанные по формуле  $\Delta\omega/\omega = \sqrt{S/L}$ .

Видно, что в конструкции из кристаллического кремния доминирует тепловой шум отражающих покрытий GaAs-AlGaAs, а в конструкции из кристаллического арсенида галлия доминирует шум подложек. Последнее обстоятельство связано с весьма значительным затуханием механических колебаний в GaAs (роль фактора потерь  $\phi$ ). В целом уровень теплового шума в представленных оценках в интерферометре из GaAs в 20 раз выше, чем в кремниевом. Эта разница может быть снижена за счет снижения рабочей температуры до 8÷10°K, где у GaAs КТР обращается в нуль, а также за счет совершенствования кристаллической структуры материала с целью уменьшения фактора потерь  $\phi$ .

По порядку величины вклады в тепловой шум элементов интерферометра – корпуса, подложек и покрытий (из одного и того же материала) – соотносятся как

$$\frac{L}{R^2} : \frac{1}{w} : \frac{d}{w^2}.$$

Поскольку размеры корпуса составляют около 0.1 м, а диаметр светового пучка около 1 мм, то вклад корпуса на два порядка меньше вклада подложек. Вклад покрытия также меньше вклада подложек из-за фактора  $d/w$ , который может быть близок к 1/(5÷10).

Для грубых оценок соотношения вкладов в полный шум элементов интерферометра, изготовленных из разных материалов, можно пользоваться пропорцией:

$$\frac{L}{R^2} \cdot \left(\frac{\phi}{E}\right)_{\text{корпус}} : \frac{1}{w} \cdot \left(\frac{\phi}{E}\right)_{\text{подложка}} : \frac{d}{w^2} \cdot \left(\frac{\phi}{E}\right)_{\text{покрытие}}.$$

Отношение  $f/E$  для кремния приблизительно в 5000 раз меньше, чем для GaAs.

Несмотря на отсутствие выигрыша по шумам, арсенид-галлиевый интерферометр привлекателен в качестве пассивного репера частоты главным образом из-за высокого качества и механической прочности GaAs-AlGaAs покрытий. При этом он может обеспечить относительную стабильность частоты на уровне  $10^{-16}$  за 1 с (см. таблицу). С помощью такого интерферометра можно решать широкий круг задач с применением частотно-стабилизированного лазерного излучения при уровне относительной стабильности частоты

## Литература

1. Kenji Numata, Amy Kemery, and Jordan Camp. “Thermal-Noise Limit in the Frequency Stabilization of Lasers with Rigid Cavities”. *PRL* **93**, 250602 (2004).

(здесь даны основные формулы)

2. D.R.M.Crooks, P.Sneddon, G.Cagnoli, J.Hough, S.Rowan, M.M.Fejer, E.Gustafson, R.Route, N.Nakagawa, D.Coyne, G.M.Harry and A.M.Gretarsson. “Excess mechanical loss associated with dielectric mirrorcoatings on test masses in interferometric gravitational wave detectors”. *Classical and Quantum Gravity* **19**, 883-896 (2002).

(здесь даны формулы для шумов покрытий)

3. J.Franc, N.Morgado, R.Flamínio, R.Nawrodt, I.Martin, L.Cunningham, A.Cumming, S.Rowan and J.Hough. “Mirror thermal noise in laser interferometer gravitational wave detectors operating at room and cryogenic temperature” ???

(подробно разобраны различные типов шумов: Brownian noise – этот шум рассмотрен в нашей статье, thermo elastic noise, thermo refractive noise, даны таблицы свойств материалов, где арсенид галлия отсутствует)

Вспомогательный материал.

1. Для цилиндрического корпуса интерферометра длиной  $L$  и радиусом  $R$  имеем /К. Numata *et al*/:

$$S(f) = \frac{2kT}{\pi f} \cdot \frac{L}{3\pi R^2 E} \phi,$$

Поскольку модуль Юнга обычно представляют в Паскалях ( $\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$ ), то выражая все длины в метрах, получим результат в  $\text{м}^2/\text{Гц}$ ;  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/град.

При  $L = 0.21$  м и  $R = 0.12$  м получаем:

для кремниевого резонатора

$$S(f) = \frac{2 * 1.38 * 10^{-23} * 124}{3.14 * 1} \cdot \frac{0.21 * 10^{-8}}{3 * 3.14 * 0.0144 * 18.8 * 10^{10}}$$

$$S(f = 1 \text{ Гц}) \approx 109 * 10^{-23} \cdot 0.0823 * 10^{-18} \approx 0.897 \cdot 10^{-40} \text{ м}^2/\text{Гц};$$

$$\sqrt{S(1 \text{ Гц})} \approx 0.95 \cdot 10^{-20} \text{ м}/\sqrt{\text{Гц}};$$

для арсенид-галлиевого резонатора

$$S(f) = \frac{2 * 1.38 * 10^{-23} * 56}{3.14 * 1} \cdot \frac{0.21 * 2.5 * 10^{-5}}{3 * 3.14 * 0.0144 * 8.6 * 10^{10}}$$

$$S(f = 1 \text{ Гц}) \approx 49.2 * 10^{-23} \cdot 0.450 * 10^{-15} \approx 22.1 \cdot 10^{-38} \text{ м}^2/\text{Гц};$$

$$\sqrt{S(1 \text{ Гц})} \approx 4.70 \cdot 10^{-19} \text{ м}/\sqrt{\text{Гц}}.$$

2. Для подложки без отражающих покрытий имеем /К. Numata *et al*/:

$$S(f) = \frac{2kT}{\pi f} \cdot \frac{1 - \sigma^2}{\sqrt{\pi w E}} \phi$$

При радиусе светового пучка  $w = 0.25$  мм получаем:

для кремниевой подложки

$$S(f) = \frac{2 * 1.38 * 10^{-23} * 124}{3.14 * 1} \cdot \frac{(1 - 0.266^2) * 10^{-8}}{\sqrt{3.14 * 0.25 * 10^{-3} * 18.8 * 10^{10}}}$$

$$S(f = 1 \text{ Гц}) \approx 109 * 10^{-23} \cdot 0.112 * 10^{-15} \approx 12.2 \cdot 10^{-38} \text{ м}^2/\text{Гц};$$

$$\sqrt{S(1 \text{ Гц})} \approx 3.49 \cdot 10^{-19} \text{ м}/\sqrt{\text{Гц}};$$

для арсенид-галлиевой подложки

$$S(f) = \frac{2 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 56}{3.14 \cdot 1} \cdot \frac{(1 - 0.31^2) \cdot 2.5 \cdot 10^{-5}}{\sqrt{3.14 \cdot 0.25 \cdot 10^{-3} \cdot 8.6 \cdot 10^{10}}}$$

$$S(f = 1 \text{ Гц}) \approx 49.2 \cdot 10^{-23} \cdot 0.593 \cdot 10^{-12} \approx 2.92 \cdot 10^{-34} \text{ м}^2/\text{Гц};$$

$$\sqrt{S(1 \text{ Гц})} \approx 1.71 \cdot 10^{-17} \text{ м}/\sqrt{\text{Гц}}.$$

3. Для вклада покрытия по упрощенной формуле имеем /К. Numata *et al*/:

$$S(f) = \frac{4kT}{\pi^2 f} \cdot \frac{d}{Ew^2} (1 + \sigma)(1 - 2\sigma)\phi.$$

При толщине покрытия  $d = 50$  мкм и механических свойствах, совпадающих с таковыми для GaAs, и радиусе светового пучка  $w = 0.25$  мм получаем:

$$S(f) = \frac{4 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 56}{3.14^2 \cdot 1} \cdot \frac{50 \cdot 10^{-6} \cdot (1 + 0.266) \cdot (1 - 2 \cdot 0.266) \cdot 2.5 \cdot 10^{-5}}{8.6 \cdot 10^{10} \cdot 0.0625 \cdot 10^{-6}}$$

$$S(f = 1 \text{ Гц}) \approx 31.3 \cdot 10^{-23} \cdot 138 \cdot 10^{-15} \approx 43.1 \cdot 10^{-36} \text{ м}^2/\text{Гц};$$

$$\sqrt{S(1 \text{ Гц})} \approx 6.57 \cdot 10^{-18} \text{ м}/\sqrt{\text{Гц}}.$$

3. Для вклада покрытия по «уточненной» формуле /D.R.M.Crooks *et al*/ имеем:

$$S'(f) = \frac{2kT}{\pi^2 f} \cdot \frac{d}{Ew^2} \times \frac{\phi' E'}{E} \cdot \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma'} \left[ (1 - 2\sigma') \frac{1 + \sigma'}{1 + \sigma} + (1 - 2\sigma)^2 \frac{1 + \sigma}{1 + \sigma'} \right],$$

где штрихованные величины относятся к покрытию, причем приходится принять  $\phi' = \phi$ . При толщине покрытия  $d = 50$  мкм и радиусе светового пучка  $w = 0.25$  мм получаем:

для покрытия на кремниевой подложке

$$\sigma = 0.266, \quad E = 18.8 \cdot 10^{10} \text{ Па},$$



$$\phi = 10^{-8} \text{ и } \sigma' = 0.402 (?), E' = 8.36 \cdot 10^{10} \text{ Па } (?), \phi' = 2.5 \cdot 10^{-5}$$

$$\frac{2kT}{\pi^2 f} = \frac{2 * 1.38 * 10^{-23} * 124}{3.14^2 * 1} = 34.7 \cdot 10^{-23};$$

$$\frac{d}{Ew^2} = \frac{50 * 10^{-6}}{18.8 * 10^{10} * 0.0625 * 10^{-6}} = 4.26 \cdot 10^{-9};$$

$$\frac{\phi' E'}{E} = \frac{2.5 * 10^{-5} * 8.36 * 10^{10}}{18.8 * 10^{10}} = 1.11 \cdot 10^{-5};$$

$$(1 - 2\sigma') \frac{1 + \sigma'}{1 + \sigma} + (1 - 2\sigma)^2 \frac{1 + \sigma}{1 + \sigma'} = (1 - 0.804) \frac{1.402}{1.266} + (1 - 0.532)^2 \frac{1.266}{1.402} =$$

$$= 0.196 * 1.107 + 0.468^2 * 0.903 = 0.217 + 0.198 = 0.415;$$

$$S'(f) = 34.7 * 10^{-23} * 4.26 * 10^{-9} * 1.11 * 10^{-5} * \frac{1 + 0.266}{1 - 0.402} * 0.415$$

$$S(f = 1 \text{ Гц}) \approx 14.4 * 10^{-36} \text{ м}^2/\text{Гц};$$

$$\sqrt{S(1 \text{ Гц})} \approx 3.80 \cdot 10^{-18} \text{ м}/\sqrt{\text{Гц}};$$

для покрытия на арсенид-галлиевой подложке  $\sigma = 0.31$ ,  $E = 8.6 \cdot 10^{10}$  Па,

$\phi = 2.5 \cdot 10^{-5}$  и  $\sigma' = 0.402$  (?),  $E' = 8.36 \cdot 10^{10}$  Па (?),  $\phi' = 2.5 \cdot 10^{-5}$  получаем:

$$\frac{2kT}{\pi^2 f} = \frac{2 * 1.38 * 10^{-23} * 56}{3.14^2 * 1} = 15.7 \cdot 10^{-23};$$

$$\frac{d}{Ew^2} = \frac{50 * 10^{-6}}{8.6 * 10^{10} * 0.0625 * 10^{-6}} = 9.30 \cdot 10^{-9}$$

$$\frac{\phi' E'}{E} = \frac{2.5 * 10^{-5} * 8.36 * 10^{10}}{8.6 * 10^{10}} = 2.43 \cdot 10^{-5};$$

$$(1 - 2\sigma') \frac{1 + \sigma'}{1 + \sigma} + (1 - 2\sigma)^2 \frac{1 + \sigma}{1 + \sigma'} = (1 - 0.804) \frac{1.402}{1.31} + (1 - 0.62)^2 \frac{1.31}{1.402} =$$

$$= 0.196 * 1.070 + 0.38^2 * 0.934 = 0.210 + 0.135 = 0.345;$$

$$S'(f) = 15.7 * 10^{-23} * 9.30 * 10^{-9} * 2.43 * 10^{-5} * \frac{1 + 0.31}{1 - 0.402} * 0.345$$

$$S(f = 1 \text{ Гц}) \approx 26.8 * 10^{-36} \text{ м}^2/\text{Гц};$$

$$\sqrt{S(1 \text{ Гц})} \approx 5.18 \cdot 10^{-18} \text{ м}/\sqrt{\text{Гц}}.$$

Модуль Юнга GaAs ([100])  $E = 8,59 \cdot 10^{11}$  Дин/см<sup>2</sup> =  $8,6 \cdot 10^{10}$  Па (Н/м<sup>2</sup>).

Коэффициент Пуассона GaAs ([100])  $\sigma = 0,31$ .

Модуль Юнга Si  $E = 18,8 \cdot 10^{11}$  Дин/см<sup>2</sup> =  $18,8 \cdot 10^{10}$  Па (Н/м<sup>2</sup>).

Коэффициент Пуассона Si  $\sigma = 0,266$ .