

Спектральные свойства графов гиперболических случайных блужданий в полях Галуа мощности 3^n

М.Д. Мартинсон

Московский физико-технический институт (государственный университет)
ФИВТ

В работе исследуются спектральные свойства оператора Лапласа на графе, индуцированном гиперболическим действием группы \mathcal{L}_3 (группа Lamplighter характеристики 3),

$$\mathcal{L}_p = \langle a, s \mid s^p = 1, [s^{a^i}, s^{a^j}] = 1 \rangle, \quad i, j \in \mathbb{Z},$$

на конечном поле Галуа мощности 3^n , а именно, рассматривается симметрическое случайное блуждание на конечном поле \mathbb{F}_{3^n} , порожденное семейством аффинных преобразований $a_k(x) = \mu x + k$, $k \in \mathbb{F}_p$. Такие динамические системы изучаются в теории групп (см. [1–4]) в связи с вычислением спектральных характеристик графов Кэли конечно-порожденных аменабельных групп. При исследовании самоподобных фрактальных групп, таких, как классическая *группа мигающих лампочек* \mathcal{L}_2 , было обнаружено следующее парадоксальное поведение оператора Лапласа: экспоненциальные показатели диффузии для собственных функций при аппроксимации графа Кэли большими конечными графами, не стремятся к непрерывному спектральному распределению, как это происходит в случае однородного уравнения теплопроводности на прямой $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$, а стабилизируются на дискретном множестве значений. Иными словами, оператор случайного блуждания имеет дискретный спектр. В работе [1] этот дискретный спектр вычислен для графа Кэли группы \mathcal{L}_2 , затем, в работах [2] и [3] вычислен спектр для групп \mathcal{L}_p в общем случае, имеющий структуру

$$\Lambda = \left\{ \cos\left(\pi \frac{m}{N}\right) : N \geq 2, 1 \leq m \leq N - 1 \right\}.$$

В то же время, представляет интерес нахождение явного вида спектра случайного блуждания для конечных графов Шрейера, а также для действий групп \mathcal{L}_p , особенно в области $p > 2$.

Цель нашей работы — произвести элементарное исследование аффинных случайных блужданий на графах малой мощности для характеристики $p = 3$.

Теорема 1. Все операторы Лапласа невырожденных гиперболических аффинных действий группы \mathcal{L}_3 на \mathbb{F}_3^n спектрально эквивалентны для $n = 2, 3$.

Теорема 2. Спектры Λ_n образуют возрастающую цепочку для $n = 2, 3, 4$:

$$\Lambda_2 = \{1, \pm \frac{1}{2}^{(2)}, 0^{(4)}\}, \quad \Lambda_3 = \{1, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}^{(2)}, \pm \frac{1}{2}^{(4)}, 0^{(8)}\}, \quad \Lambda_4 = \{1, \pm \frac{\sqrt{5}+1}{2}^{(2)}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}^{(4)}, \pm \frac{1}{2}^{(8)}, 0^{(16)}\}.$$

Теорема 3. Среди графов действия группы \mathcal{L}_3 на \mathbb{F}_9 есть графы, изоморфные лишь в слабом смысле.

Список литературы

[1] Григорчук Р.И., Некрашевич В.В., Сушанский В.И. Автоматы, динамические системы и группы. Динамические системы, автоматы и бесконечные группы, Сборник статей. Тр. МИАН, **231**, Наука, М., 2000, 134–214с.

[2] Grigorchuk R.I., Zuk. A. The lamplighter group as a group generated by a 2-state automaton, and its spectrum. *Geom. Dedicata*, **87** 2001, 209–244с.

[3] Dicks W., Schick Th.

The spectral measure of certain elements of the complex group ring of a wreath product. *Geom. Dedicata*, **93** 2002, 121–137c.

[4] Bartholdi L., Woess W.

Spectral computations on lamplighter groups and Diestel-Leader graphs. *J. Fourier Anal. Appl.* **11** 2005, no. 2, 175–202c.