

А. В. Волков^{1,2}, Т. Д. Зыонг²

¹ Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского

² Московский физико-технический институт (государственный университет)

Численное решение системы уравнения водности методом Галеркина с разрывными функциями

В работе представлена новая система уравнения водности и её численное решение. Описан метод расчета обтекания полуцилиндра потоком газа, содержащего капельки воды. Оценивается вероятность попадания капель на критически важные участки поверхности коэффициентом захвата и сопоставляется эффективность разработанного подхода по сравнению с известными решениями. Изложен метод конечного элемента Галеркина с разрывными базисными функциями (РМГ) повышенной точности. Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными.

***Ключевые слова:** метод конечного объема, метод конечного элемента, подход Лагранжа, подход Эйлера, уравнение водности, граничные условия, уравнения Эйлера, коэффициент захвата.*

Введение

В последние годы много работ посвящено обледенению элементов конструкции самолета. Это связано с повышением внимания к безопасности полетов. Рассматриваются различные подходы к экспериментальному, численному и теоретическому решению сформулированной проблемы. Наряду с полной постановкой задачи обледенения, которая является чрезвычайно трудной и затратной, рассматриваются упрощенные подходы, основанные на предположении «тонкого льда» или начальной стадии обледенения. При этом внимание фокусируется на некоторых критически важных участках поверхности самолета, например, на зонах установки датчиков авионики, измеряющих параметры полета. Следует отметить, что на практике не всегда следует доводить дело до момента появления льда. Достаточно обеспечить учет концентрации капель воды при полете во влажной атмосфере, так как высокая концентрация воды уже является

достаточно опасным фактором, влияющим на безопасность. В истории мировой авиации известно несколько случаев, когда полет в грозовых облаках заканчивался катастрофой, в том числе и по причине неправильной работы датчиков авионики. Таким образом, в данной статье основное внимание уделено проблеме расчетного предсказания зон неблагоприятного расположения указанных датчиков.

Задача подробно рассмотрена в нескольких работах. Так в случае микро-капель небольшого размера (менее 20 мкм) получено хорошее совпадение теоретических и расчетных данных. Хорошие результаты продемонстрировали программы ZEUS [1], LEWICE 2D [2], ONERA [3], TRAJICE 2D [4], CANICE [5], 2DFOIL-ICE [6], FENSAP-ICE [7], DROP3D [8].

Программа *LEWICE 2D* реализует метод Лагранжа. Она содержит аналитическую модель процесса обледенения капель воды, попадающих на поверхность крыла. Структурно *LEWICE 2D* состоит из четырех основных модулей: 1) модуль расчета обтекания профиля; 2) модуль определения траектории капель воды и коэффициент захвата; 3) модуль расчета процесса нарастания льда; 4) модуль коррекции геометрии профиля путем учета льда. С помощью этой программы решены практически-важные задачи нарастания льда на цилиндре и на многоэлементных крыловых профилях. Программы ONERA, TRAJICE2D, CANICE, 2DFOIL-ICE также основаны на подходе Лагранжа. Траектории полета капель рассчитываются по готовым аэродинамическим полям. Результаты расчетов сопоставлены с экспериментальными данными, полученными в NASA. Трёхмерные задачи при помощи программы [2] не решались.

В двух программах *FENSAP-ICE* и *DROP3D* используется подход Эйлера. Решается непосредственно система уравнений “водности”. Предполагается, что форма капель воды неизменна. При этом пренебрегают следующими эффектами: 1) столкновением капель воды в процессе движения; 2) отсутствием конденсации на поверхности; 3) выделением тепла и обменом массы между газовой и жидкой фазами; 4) влияние турбулентности на аэродинамические свойства капель также не учитывается. Система уравнения водности решается методом конечного элемента *SUPG* [9].

Программа *ZEUS* разработана в рамках метода конечного объема для решения уравнений Навье - Стокса, осредненных по Рейнольдсу. В данной

работе подготовлена специальная версия программы, реализующая уравнения водности в двух- и трехмерной постановках.

Особое внимание в мировой литературе уделено разработке программ на базе метода Галеркина с разрывными базисными функциями (РМГ). При этом решается задача в рамках уравнений «водности», как наиболее перспективных. В англоязычной литературе метод имеет название Discontinuous Galerkin Method (DGM) [10]. Наибольший интерес в этом методе вызывает его общность, гибкость и надежный теоретический базис. Известно, что вопрос о применимости методов высокого порядка точности к решению задач внешней аэродинамики обсуждался, например, в работах [11] [12]. Здесь изучались особенности обтекания водным потоком цилиндра. Затронут также вопрос обтекания сферы. При этом предложен метод преобразования дискретных траекторией капель в непрерывное поле течения воды.

Численный метод на основе Эйлера подхода максимально приближен к методам расчета двухфазных потоков. Поле капель воды определяется путём решения системы специальных уравнений. Предварительный расчет аэродинамических полей (воздух) в этой постановке практически не требуется. Они используются только для постановки начальных и граничных условий. Дискретные траектории в этом случае не рассчитываются. Это позволяет существенно экономить компьютерные ресурсы. Тем не менее, результаты дают детальную информацию о плотности распределения капель воды вблизи поверхности исследуемого тела. Применение Эйлера подхода не отменяет применения Лагранжевых методологий, которые являются наиболее простыми и понятными. Они позволяют достаточно точно моделировать траектории движения капель воды с последующим определением мест их концентрации. Эти методы хорошо работают в двухмерном случае. Основная проблема трехмерной реализации заключается в больших временах расчета. С появлением мощных компьютеров эта проблема легко преодолевается.

1. Система уравнений «водности»

В данном параграфе рассмотрим основные системы уравнений, применяемые в данной работе. Задача решается в допущениях, сформулированных в статье [13], а именно: а) объём капли воды настолько мал, что его влияние на поток воздуха пренебрежимо мало; б) в уравнениях движения учитываются только силы сопротивления и тяжести; в) в

уравнениях не учитываются процессы испарения вещества; д) капли воды имеют сферическую форму с известными диаметрами.

а) Уравнение неразрывности

Известно, что масса вещества сохраняется в определённом объеме. Исходя из этого, уравнение неразрывности приобретает вид [14]:

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{\partial m}{\partial t} + \nabla \cdot (m\vec{u}) = 0$$

где m, \vec{u} - масса капель воды и вектор их скорости. Введем понятие «водности» по аналогии с тем, как это делается при изучении двухфазных течений. В англоязычной литературе «водность» обозначается *LWC – liquid water content* или также ρ . Другими словами, «водность» – это

масса капель воды, содержащихся в единице объема: $LWC \equiv \rho = \frac{m}{V_{tot}} = \rho_w \frac{V}{V_{tot}}$

, где $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ - плотность капель воды, V_{tot} – контрольный объем.

Заметим, что размерность водности kg/m^3 совпадает с размерностью плотности. Этим объясняется использование переменной ρ . Путем простых преобразований приведенные выше уравнения записываются в виде:

$$\left. \begin{array}{l} m = \rho V_{tot}; V_{tot} = const \\ \frac{Dm}{Dt} = \frac{\partial \rho V_{tot}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V_{tot} \vec{u}) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

Физически необходимо исключить возможность появления областей, в которых $\rho < 0$. Естественно, что при обтекании потоком с каплями воды твёрдого тела всегда существуют зоны (например, донная область), куда капли не попадают, и это обеспечивает физически понятное условие $\rho = 0$, но отрицательная «водность» противоречит законам физики. Тем не менее, система уравнений «водности» при определенных условиях обеспечивает такое решение.

Чтобы разобраться в этом вопросе, введем новую переменную $\varphi = \lg \rho$, другими словами, $\rho = 10^\varphi$. Таким преобразованием мы решим сразу несколько проблем:

1. Обеспечим положительность переменной $\rho = 10^\varphi > 0$,
2. Обеспечим наглядность интерпретации результатов,

Проведем замену в исходном уравнении $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$

$d\rho = d(10^\varphi) = d(e^{\varphi \ln 10}) = \ln 10 \cdot 10^\varphi d\varphi$ и в результате получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi u_i) = \left(\varphi - \frac{1}{\ln 10} \right) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (1)$$

б) Уравнения импульса

Силами, действующими на капли воды, являются сила аэродинамического сопротивления, сила тяжести и архимедова сила. Силу сопротивление \vec{F}_D рассчитываем с применением метода, описанного в работе [15]. Формула имеет простой алгебраический вид

$$\vec{F}_D = \frac{1}{2} \rho_a \bar{u}_r^2 A C_D = \frac{\pi}{8} \rho_a d^2 (\bar{u}_a - \bar{u})^2 C_D, \quad \text{где } A = \pi(d/2)^2 \quad - \text{ площадь}$$

поперечного сечения капли воды с диаметром d . В некоторых статьях диаметр капли обозначается аббревиатурой *MVD* – *Mean Volume Diameter*.

Следует учитывать, что ρ_a, \bar{u}_a – плотность и вектор скорости окружающего воздуха, C_D – коэффициент сопротивления, число Рейнольдса Re_d капли

воды относительно воздуха вычисляется, как $Re_d = \frac{\rho_a d}{\mu} |\bar{u}_a - \bar{u}|$.

Окончательно расчетная формула выглядит, как, $\vec{F}_D = \frac{\pi}{8} \mu d (\bar{u}_a - \bar{u}) C_D Re_d$

где μ – кинетическая вязкость воздуха. Продолжим преобразования и вспомним, что силы тяжести и Архимеда выражаются следующим образом:

$$\vec{F}_G = +m\vec{g} = +\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 \rho_w \vec{g} \quad \vec{F}_B = -\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 \nabla p_a$$

где $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ – плотность воды, ρ_a – плотность воздуха.

Применяя второй закон Ньютона, получим уравнение движения капель в виде:

$$m \frac{d\bar{u}}{dt} = \vec{F}_D + \vec{F}_G + \vec{F}_B$$

$$m \frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\pi}{8} \mu d (\bar{u}_a - \bar{u}) C_D Re_d + m\vec{g} - \vec{F}_B$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{0.75\mu C_D \text{Re}_d}{\rho_w d^2} (\bar{u}_a - \bar{u}) + \bar{g} - \frac{1}{\rho_w} \bar{\nabla} p_a$$

Для удобства вводим дополнительные обозначения:

$$C_f(C_D \text{Re}_d) = \frac{0.75\mu C_D \text{Re}_d}{\rho_w d^2}. \text{ Для простоты мы пренебрегаем членами}$$

$\bar{g}(1 - \rho_a / \rho_w)$, тогда на капли воды действует только сила сопротивления.

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = C_f(\bar{u}_a - \bar{u}) \text{ или } \begin{cases} \frac{du}{dt} = C_f(u_a - u) \\ \frac{dv}{dt} = C_f(v_a - v) \end{cases}$$

Известно, $\bar{u} = \bar{u}(t, x, y) = [u, v]$, проведем некоторое преобразование и в итоге получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} &= C_f(u_a - u) + u \cdot \text{div}(\mathbf{u}) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} &= C_f(v_a - v) + v \cdot \text{div}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2)$$

Мы уже получили систему уравнения сохранения импульса (2), которая совершенно не зависит от водности ρ . Эта система преобразована физически и математически. Значит, мы можем решать систему (2) автономно (два уравнения и две переменные не зависят от водности ρ).

Следует отметить, что в системе уравнение (2) появились компоненты градиента скорости $\partial u / \partial x, \partial v / \partial y$. В настоящей работе используется метод, предложенный в работе [20]. Этот способ будет далее обозначаться аббревиатурой BR2 (Bassi & Rebay – 2). Метод BR2 дает хорошую точность решения, является симметричным, сохраняет компактность шаблона и легко обобщается на неструктурированные сетки. Однако метод BR2 теряет аппроксимацию при $K = 0$, поэтому следует брать $K \geq 1$ [12].

В расчете используем эмпирические соотношения [16]:

$$\begin{aligned} C_D \text{Re}_d &= 24 \left(1 + 0.0197 \text{Re}_d^{0.63} + 2.6 \times 10^{-4} \text{Re}_d^{1.38} \right) \text{ для } \text{Re}_d < 1000 \\ C_D \text{Re}_d &= 0.4 \text{ для } \text{Re}_d > 1000 \end{aligned}$$

2. Метод Галеркина с Разрывными функциями (РМГ)

Из первого параграфа система уравнений водности, описывающая двухмерные течения может быть представлена в следующей форме записи:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(Q) = S(Q, \mathbf{G}) \quad (3)$$

Вектор примитивных переменных имеет вид $Q = [\varphi; u; v]^T$. Вводится также \mathbf{G} - набор векторов градиентов вектора примитивных переменных $\mathbf{G} \equiv \nabla Q = [G_x; G_y]^T$, где:

$$G_x = [\partial\varphi/\partial x; \partial u/\partial x; \partial v/\partial x]^T; G_y = [\partial\varphi/\partial y; \partial u/\partial y; \partial v/\partial y]^T$$

Вектор потоков $\mathbf{F} = [F_x; F_y]^T$, где $F_x; F_y$ - это векторы потоков вдоль осей x и y :

$$F_x(Q) = [\varphi u; u^2; uv]^T; F_y(Q) = [\varphi v; uv; v^2]^T$$

$S(Q, \mathbf{G})$ - вектор источниковых членов:

$$S(Q, \mathbf{G}) = \left[\left(\varphi - \frac{1}{\ln 10} \right) \cdot \text{div } \vec{u}; C_f(u_a - u) + u \text{div } \vec{u}; C_f(v_a - v) + v \text{div } \vec{u} \right]^T$$

Для построения конечно-элементной аппроксимации в каждой ячейке сетки решение представляется в виде линейной комбинации локальных полиномиальных базисных функций $\varphi_j(\mathbf{x})$ [17]:

$$Q = \sum_{j=1}^{K_f} q_j \varphi_j(\mathbf{x}),$$

Коэффициенты $q_j = [(q_j)_\varphi; (q_j)_u; (q_j)_v]^T$ - неизвестные величины. В качестве базисных функций используются полиномы вида $\varphi_j(x, y) = \tilde{X}^{\alpha_j} \tilde{Y}^{\beta_j}$, где $\tilde{X}(x) = \frac{x - x_c}{x_{\max} - x_{\min}}$, $\tilde{Y}(y) = \frac{y - y_c}{y_{\max} - y_{\min}}$, а $(x_c; y_c)$ - координаты центра ячейки [18]. Показатели степени α_j, β_j - неотрицательные целые числа. Степень полинома $(\alpha_j + \beta_j)$ меняется от 0 до K . Для $K \leq 3$ последовательности показателей α_j, β_j имеют вид:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

α_j	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0
β_j	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3

Базисные функции должны образовывать полный набор, т.е. любой полином степени не выше K должен однозначно выражаться в виде линейной комбинации базисных функций. Число базисных функций равно K_f . В двухмерном случае величина K_f связана с максимальной степенью базисного полинома K соотношением: $K_f(K) = \frac{(K+1)(K+2)}{2}$ [19].

Для нахождения зависимости коэффициентов q_j от времени каждое из уравнений системы уравнений умножается на базисные функции и интегрируется по объему ячейки Ω :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(Q, \mathbf{G}) \right) \varphi_i(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} S(Q, \mathbf{G}) \varphi_i(\mathbf{x}) d\Omega, \quad i = 1, \dots, K_f.$$

К выписанному уравнению сначала применяется преобразование $(\nabla \cdot \mathbf{F})\varphi = \nabla \cdot (\mathbf{F}\varphi) - \mathbf{F}\nabla\varphi$, а затем – формула Гаусса–Остроградского: $\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\Omega = \oint_{\Sigma} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) d\Sigma$, где Σ – поверхность ячейки Ω , \mathbf{n} – вектор внешней нормали к элементу поверхности ячейки $d\Sigma$. В результате получается уравнение:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial t} \varphi_i(\mathbf{x}) d\Omega + \oint_{\Sigma} F_n \varphi_i(\mathbf{x}) d\Sigma = \int_{\Omega} F_i d\Omega + \int_{\Omega} S \varphi_i(\mathbf{x}) d\Omega, \quad i = 1, \dots, K_f,$$

где: $F_n = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) = F_x n_x + F_y n_y$, а $F_i \equiv (\mathbf{F} \cdot \nabla \varphi_i(\mathbf{x})) = F_x \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x} + F_y \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial y}$.

Окончательно записываем:

$$\frac{dq_j}{dt} = \mathbf{M}^{-1} \left[- \oint_{\Sigma} \varphi_i \mathbf{F}^{decay} \mathbf{n} d\Sigma + \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \mathbf{F} d\Omega + \int_{\Omega} \varphi_i S d\Omega \right] = \mathbf{M}^{-1} \text{Res}_j$$

Значения параметров на гранях ячеек вычисляются по схеме Лакса – Фридрикса [21].

3. Граничные условия

3.1. Граничное условие на внешней границе

Рассматривается произвольная гауссова точка \mathbf{x}_g^s на границе блока. Вектор примитивных переменных Q_{out} в этой точке в потоке, расположенном снаружи блока, по другую сторону грани ячейки с номером s , вычисляется по формулам

$$Q_{out}(\mathbf{x}_g^s) = F_b^s(Q_{in}) \equiv \begin{cases} Q_{in}(\mathbf{x}_g^s), & (V_n)_{in} \geq 0, \\ Q_\infty & (V_n)_{in} < 0 \end{cases} = s \cdot Q_{in}(\mathbf{x}_g^s) + (1-s) \cdot Q_\infty, \quad (4)$$

где $s = \begin{cases} 1, & (V_n)_{in} \geq 0, \\ 0, & (V_n)_{in} < 0, \end{cases}$ где $(V_n)_{in} = u_{in}n_x + v_{in}n_y$ - проекция скорости капель

в потоке, прилегающем к границе изнутри расчетной области, на единичный вектор нормали к границе, направленный наружу из расчетной области. В формуле (4) $Q_{in} = \sum_{j=1}^{K_f} q_j \varphi_j(\mathbf{x}_g^s)$ - параметры потока, прилегающего к границе блока изнутри расчетной области (q_j и φ_j берутся из приграничной ячейки).

3.2. Граничное условие на твердой поверхности

На твердой поверхности имеется ряд особенностей. Предполагается, что вся вода, движущаяся к стенке, конденсируется на ее поверхности и образует бесконечно тонкую пленку льда, не меняющую форму обтекаемого тела. Если же скорость в приграничной ячейке направлена от поверхности, то на границе задаются нулевые значения водности и скорости капель.

Рассматривается произвольная гауссова точка \mathbf{x}_g^s на границе тела. Пусть $Q_{in} = [\rho_{in}; u_{in}; v_{in}]^T$ - параметры, вычисляемые по формуле $Q_{in} = \sum_{j=1}^{K_f} q_j \varphi_j(\mathbf{x}_g^s)$. Тогда вектор примитивных переменных на границе тела в точке \mathbf{x}_g^s вычисляется следующим образом:

$$Q(\mathbf{x}_g^s) \equiv \begin{bmatrix} \rho(\mathbf{x}_g^s) \\ u(\mathbf{x}_g^s) \\ v(\mathbf{x}_g^s) \end{bmatrix} = S_b^s(Q_{in}) \equiv kQ_{in} = \begin{bmatrix} k\rho_{in} \\ ku_{in} \\ kv_{in} \end{bmatrix}, \quad k = \begin{cases} 0.99, & (V_n)_{in} > 0, \\ 0, & (V_n)_{in} \leq 0, \end{cases} \quad (5)$$

где $Q_{in} = \sum_{j=1}^{K_f} q_j \varphi_j(\mathbf{x})$ (q_j и φ_j берутся у стенки), $V_n = un_x + vn_y$ - вектор скорости вдоль нормали к стенке, $(n_x; n_y)^T$ - единичный вектор нормали к стенке в данной гауссовой точке.

4. Исследование сходимости системы уравнения водности

Видно, что система уравнений сохранения импульса не зависит от уравнения неразрывности, поэтому, сначала решаем систему сохранения импульса (2) и получаем поле скорости капель воды. После этого переходим к решению уравнения неразрывности (1). При решении уравнения (1) значения φ на гранях ячеек также вычисляются по схеме Лакса – Фридрихса

На рисунке 1 представлены графики невязок расчета.

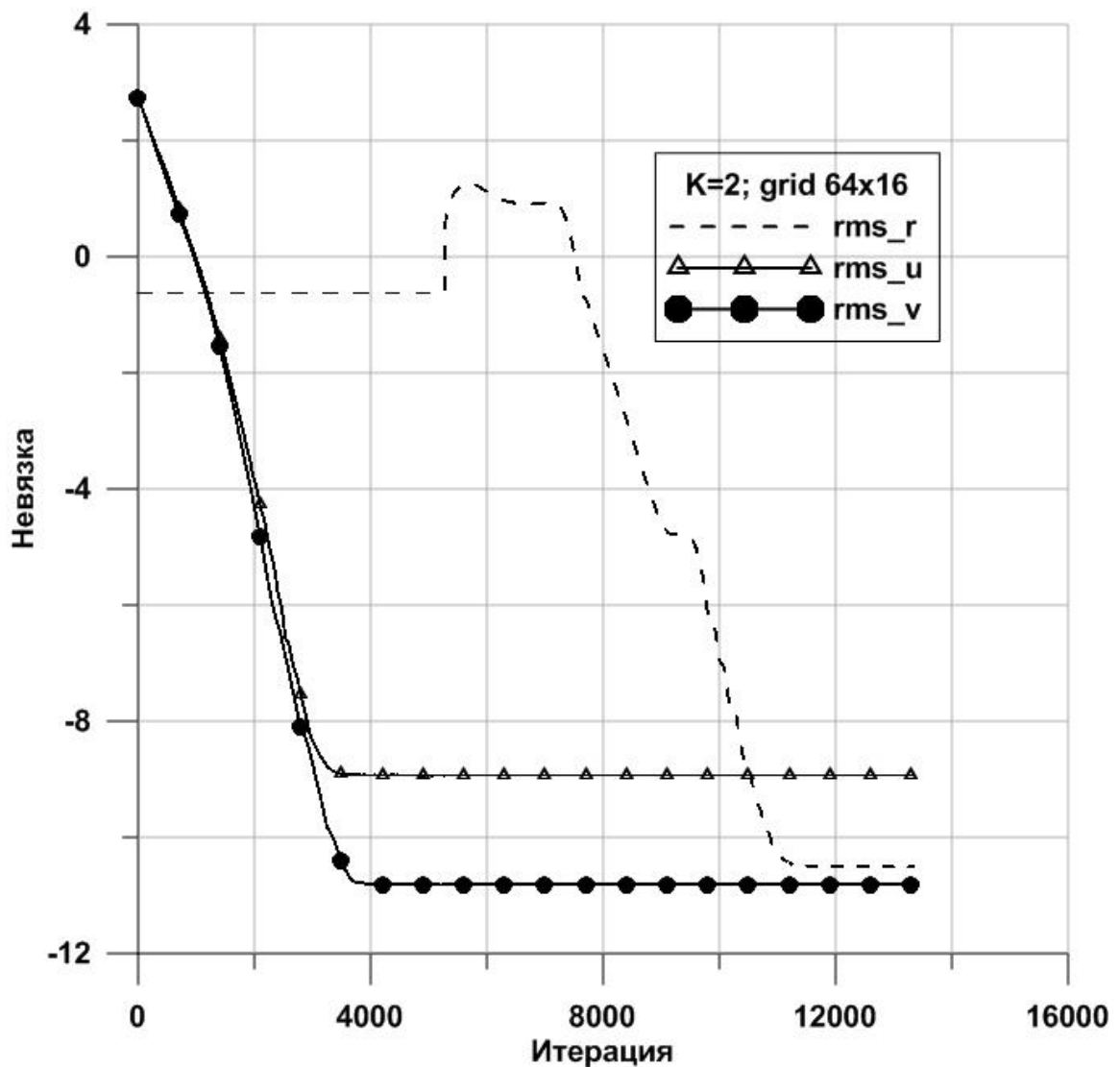


Рис. 1: Невязки при решении систем (1) и (2)

Сначала решается система уравнения (2). Видно, что невязки по скорости сходятся, а невязка по водности не изменяется, так как уравнение неразрывности (1) не решалось. После получения поля скорости (5000 итерация), расчет вычисления скорости останавливается и запускается расчет вычисления поля водности, поэтому невязка по водности изменяется и стремится к машинному нулю.

В итоге, система уравнений импульса (2) не зависит от водности, уравнение неразрывности (1) зависит от компонент скорости. Поэтому мы выполнили некоторые тесты, чтобы уточнить, сходятся ли решения уравнения неразрывности (1) при любых полях скоростей капель воды. Для удобства эти тесты будем называть «*тестами одновременного схождения*».

Тесты проведены следующим образом: сначала мы запускаем программу для вычисления поля скорости (система уравнений 2). Но программа выполняет только 1000 итераций. В этом случае поле скорости не достигает стационарного состояния (невязки еще большие). После 1000 итераций мы получаем поле скорости, которое используем для нахождения поля водности и определения сходимости уравнения неразрывности (1) из полученных полей скоростей. Потом эта процедура повторяется....

На рисунке 2 видно, что после 1000 итераций, мы получаем поле скорости. Потом запускаем программу, чтобы найти поле водности из полученных полей скоростей. Видно, что поле водности ρ сходится до $1.0e-11$. Эта процедура повторяется. Мы продолжаем вычислять поле скорости из ранее полученных скоростей.

Заметим, что поле водности всегда сходится, если есть поле скорости

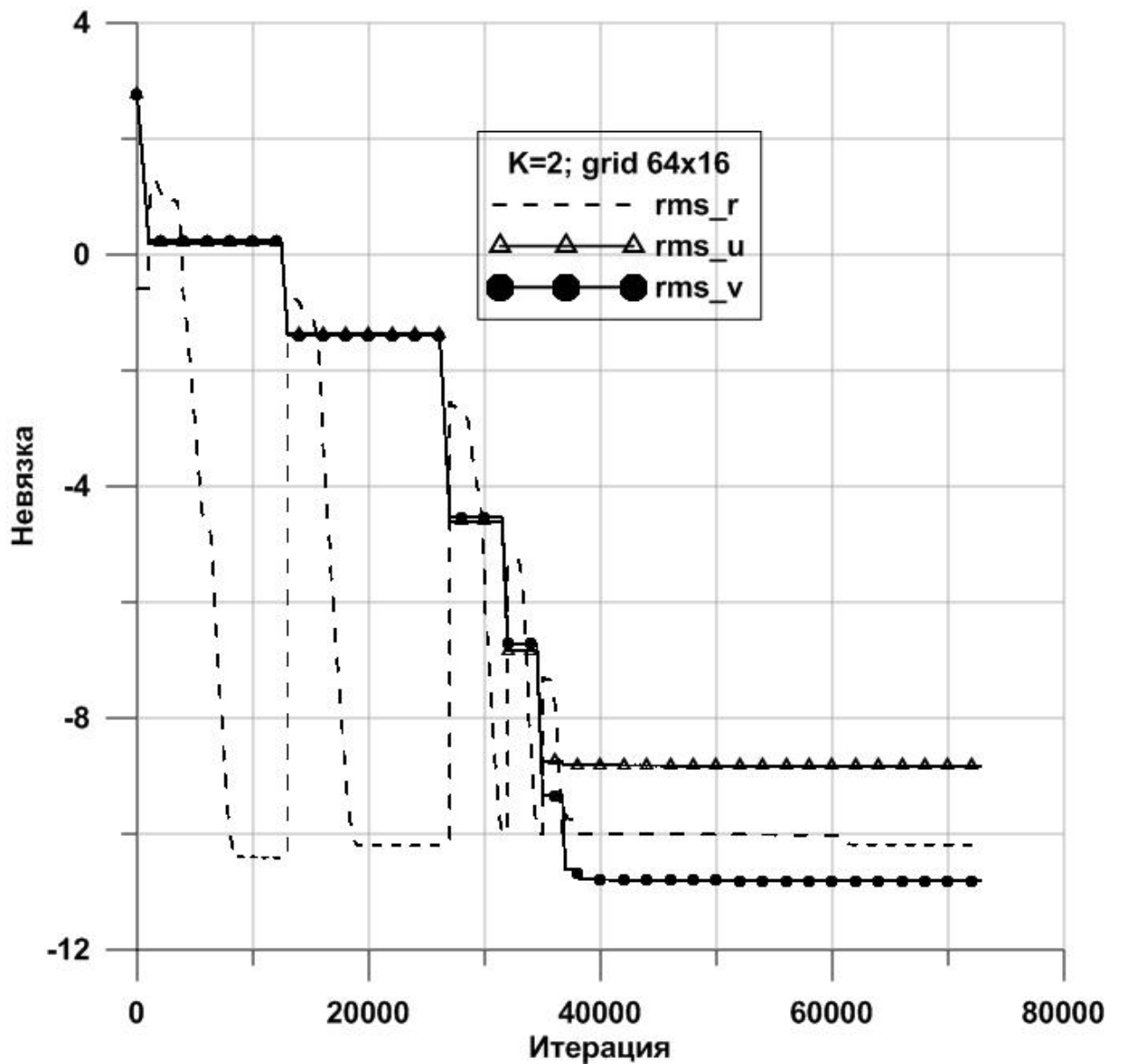


Рис. 2: Картинка невязок в тесте одновременного схождения при $K = 2$

На основе полученных результатов мы попытались одновременно решать три уравнения (два уравнения сохранения импульса (2) и уравнение непрерывности (1))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi v}{\partial y} &= \left(\varphi - \frac{1}{\ln 10} \right) \operatorname{div}(\mathbf{u}) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} &= C_f(u_a - u) + u \cdot \operatorname{div}(\mathbf{u}) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} &= C_f(v_a - v) + v \cdot \operatorname{div}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (6)$$

Ниже изображены средние невязки $rms = (rms_r + rms_u + rms_v)/3$.

Из ниже картинки невязок видно, что теперь схема решения системы уравнений водности уже сходится.

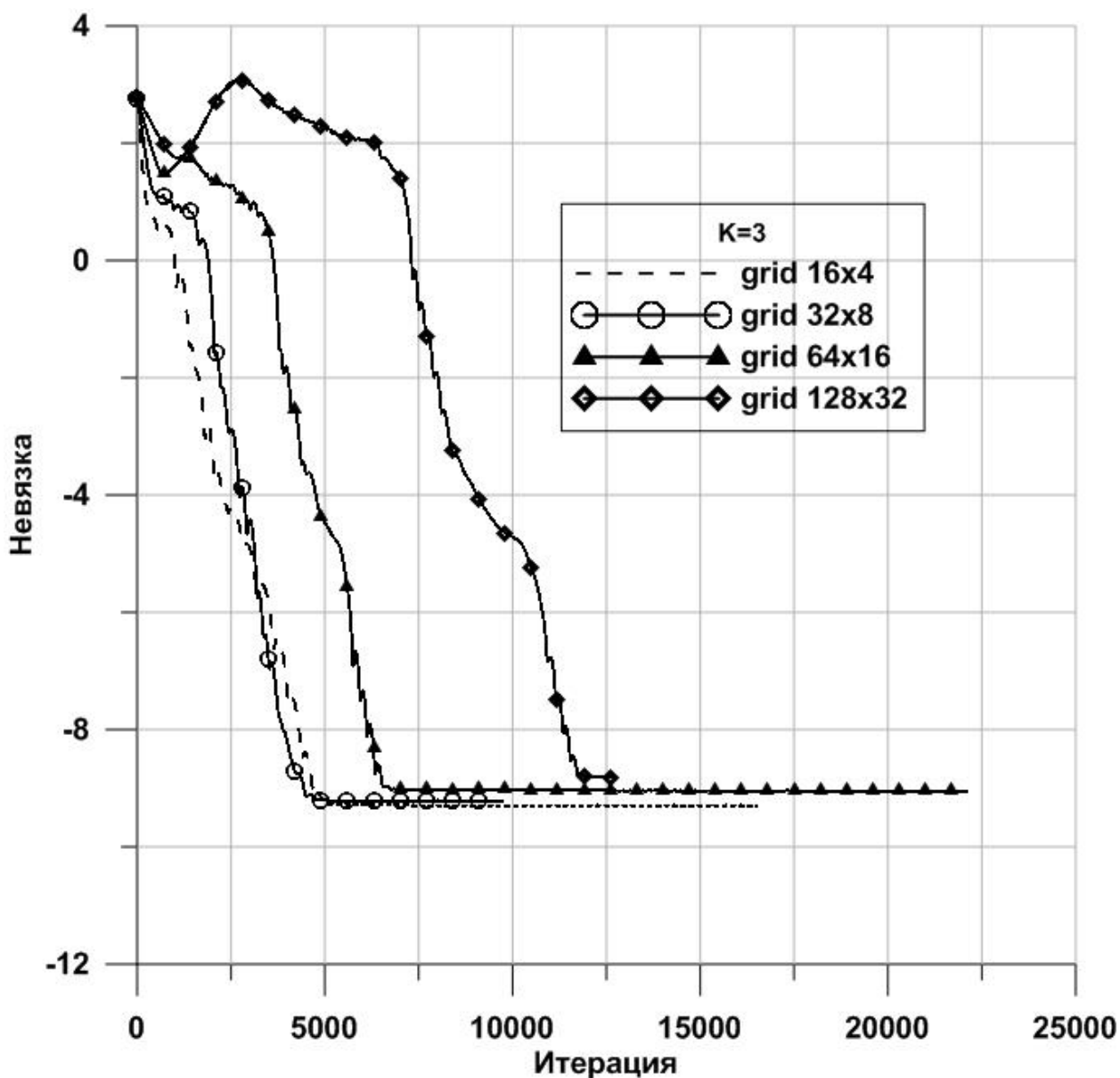


Рис. 3: Зависимость невязок от итерации при $K = 3$

5. Расчет обтекания полуцилиндра

Определение коэффициента захвата по подходу Эйлера

При обработке результатов эксперимента и численного расчета рассматривается так называемый коэффициент захвата, представляющий отношение потока капель воды, попадающих на поверхность тела, к потоку капель в невозмущенном поле течения [22]:

$$\beta = \frac{\rho V_n}{\rho_\infty V_\infty},$$

где V_n — нормальная скорость капли к поверхности полуцилиндра

Рассмотрим обтекание полуцилиндра воздухом, который содержит капли воды. Условия задачи приведены ниже:

$$R_{\text{цилиндра}} = 0.0508 \text{ м}, MVD = 16 \text{ мкм}, V_a = V = (80.0, 0.0) \text{ м/с},$$

$$\rho = 0.55 \text{ г/м}^3, T = 12^\circ \text{ C}, P = 89867 \text{ Па}$$

Расчеты проведены на последовательности из четырех сеток, размер которых варьировался в диапазоне от 16×4 до 128×32 , путем удвоение количества точек по каждому из направлений (см. рисунок 4)

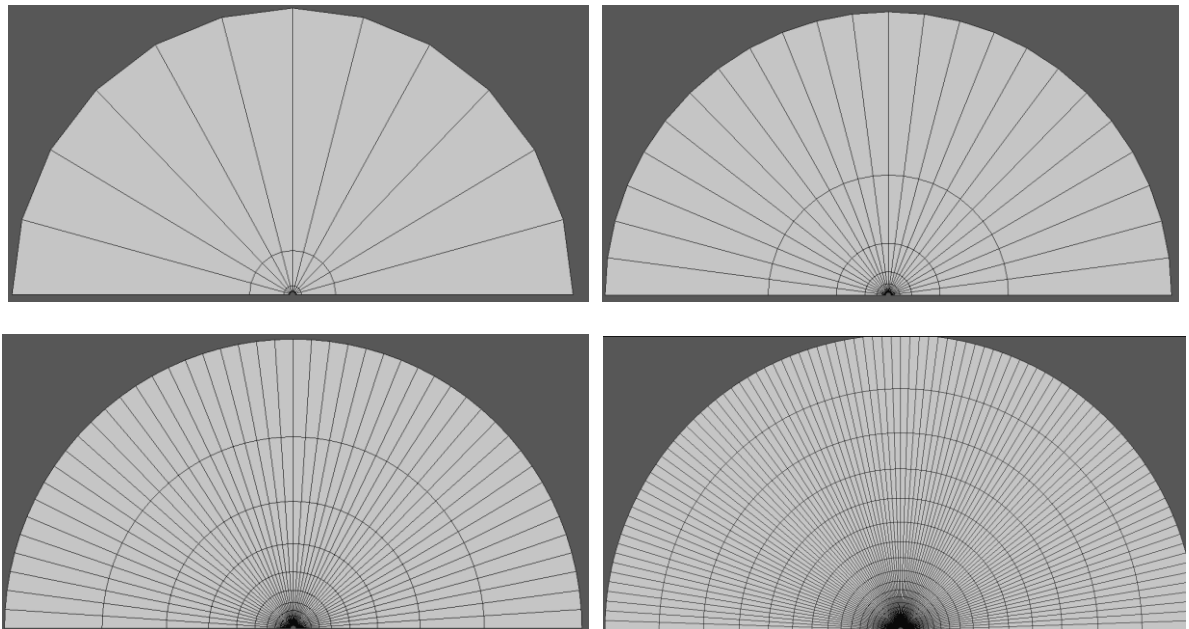


Рис. 4: Сетки 16×4 , 32×8 , 64×16 и 128×32 ячеек

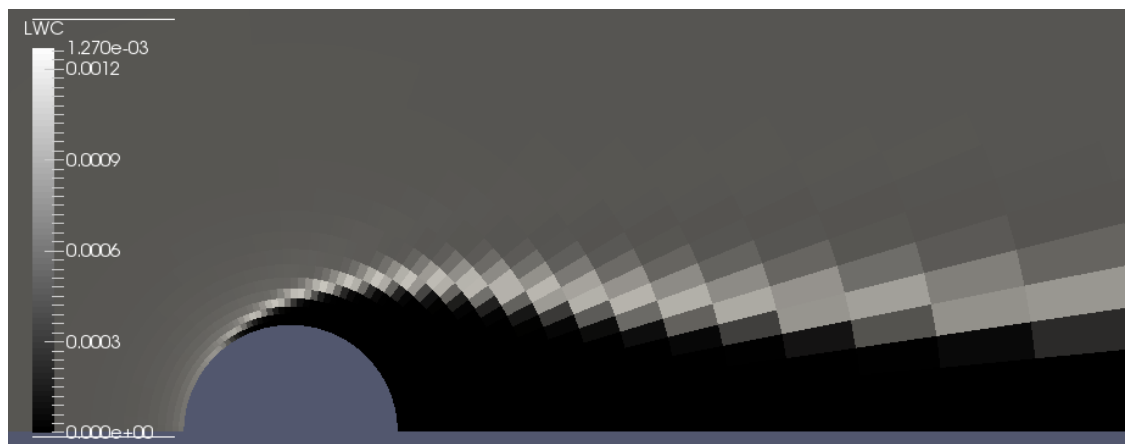
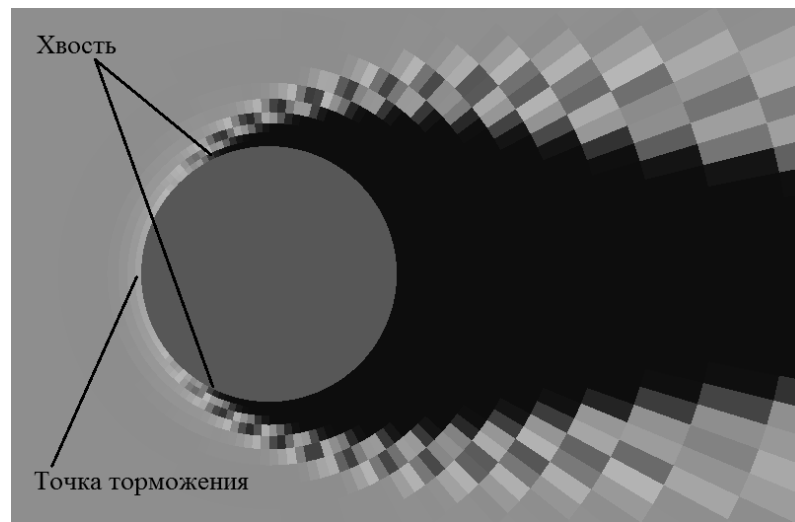


Рис. 5. Поле водности ρ



Полученное поле водности показано на рисунке 5. Видно, что в донной области полуцилиндра образуется область нулевой плотности. Сравним результаты расчета с экспериментальными данными [23] и с результатами моделирования в рамках подхода Лагранжа.

На рисунке 6 представлен график, из которого видно, что в точке торможения результаты расчета полностью укладываются в диапазон разброса экспериментальных данных. В то же время в донной области заметны существенные отличия, капли воды в расчете отрываются от цилиндра раньше, чем в эксперименте. Это объясняется тем, что в расчете после удара о поверхность полуцилиндра капли сразу останавливаются, другими словами, сразу образуется лед, в то время, как в реальности капли после удара о поверхность цилиндра могут «расщепляться» на мелкие части и растекаться в разные стороны, образуя «хвосты». Существует также значительное расхождение между расчетами, выполненными в различных постановках.

На рисунке 7 показаны результаты исследования сходимости по сеткам. Видно, что чем подробнее сетки, тем ближе к эксперименту располагаются расчетные данные. Для сетки 16×4 полученные коэффициенты захвата неприемлемы с точки зрения практики.

На рисунке 8 приведены расчеты для разных значений. Известно, что при $K > 1$ необходимо учитывать кривизну поверхности цилиндра. При выполнении этого условия наблюдается наилучшее совпадение расчета с экспериментом. Уже для сетки 16×4 расчет хорошо соответствует экспериментальным данным.

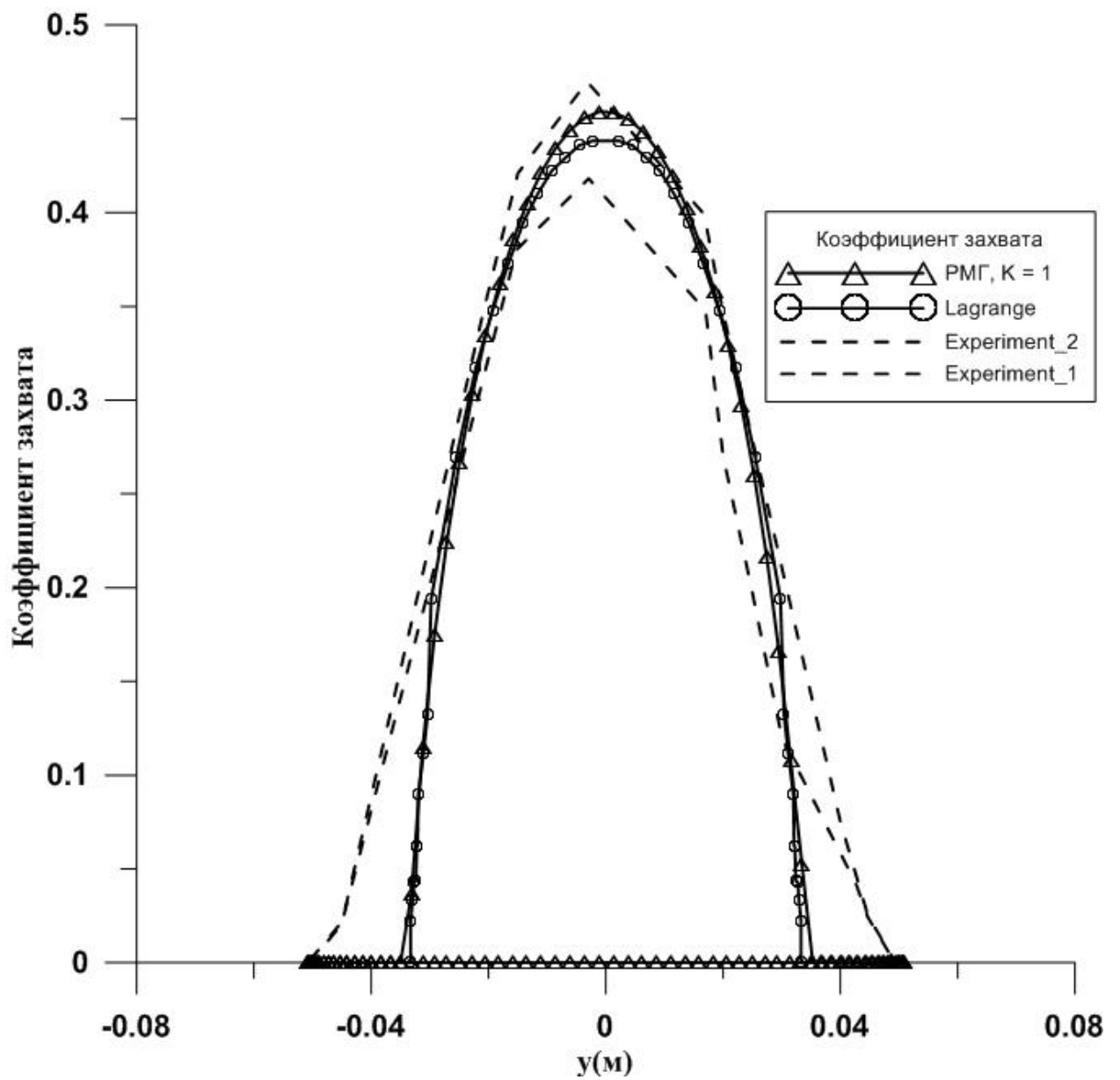


Рис. 6: Сопоставление расчетных и экспериментальных значений коэффициента захвата капель на полуцилиндре

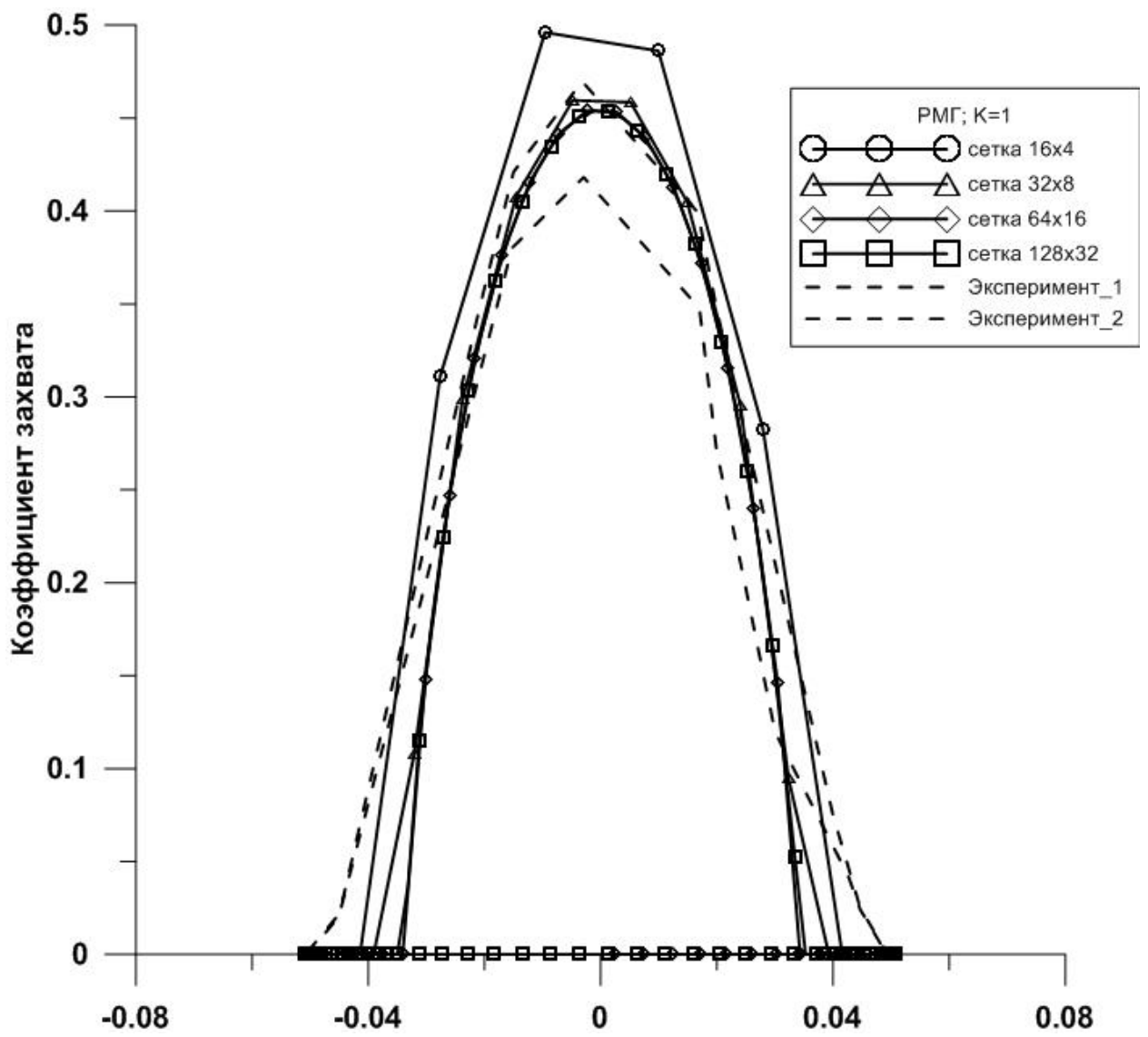


Рис. 7. Сопоставление результатов для разных сеток

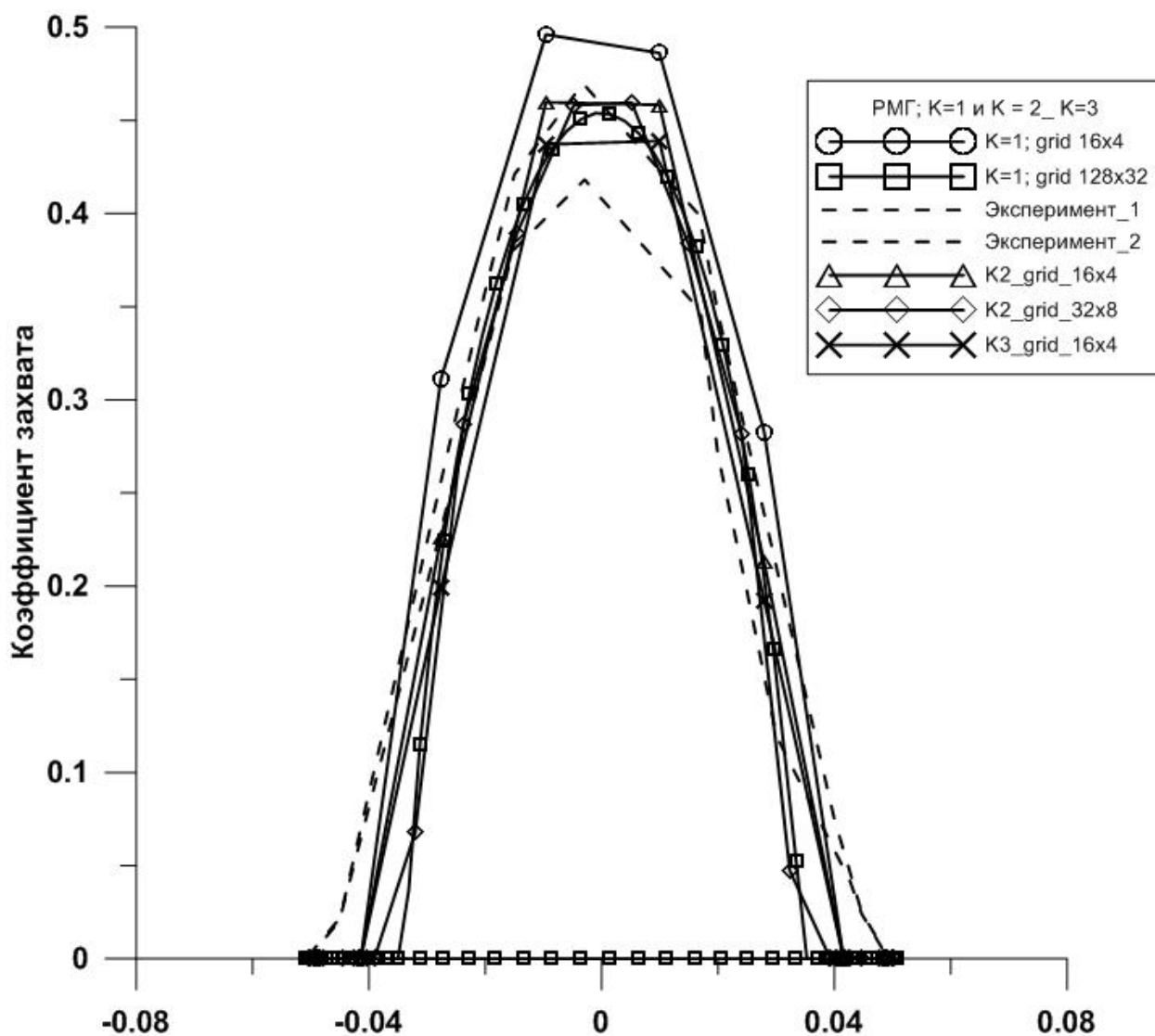


Рис. 8: Сопоставление результатов для разных K ($K = 1$, $K = 2$ и $K = 3$)

Заключение

Представлена новая система уравнений водности. Проведены тесты, показывающие, что она зарекомендовала себя как надежная система уравнений для решения задачи обтекания каплями воды по методу РМГ.

Результаты расчета при $K = 2, 3$ и на крупных сетках хорошо соответствуют экспериментальным данным

Для сетки 16×4 и $K = 1$ полученные коэффициенты захвата неприемлемы с точки зрения практики

ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Михайлов С. В., «Программа, реализующая зонный подход, для расчета нестационарного обтекания вязким потоком турбулентного газа ложных аэродинамических форм, включая крыло с механизацией (ZEUS),» *Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ, № Выпуск № 2013610172, Oct. 2012.*

[2] Wright W. B., «Users manual for the Improved NASA lewis ice accretion code LEWICE 1.6,» *National Aeronautical and Space Administration (NASA), Contractor Report, May, 1995 .*

[3] Gent R. W., «TRAJICE2, a combined water droplet and ice accretion prediction program for aerofoil,» *Royall Aerospace Establishment (RAE). - Farnborough, Hampshire, Technical Report Number TR90054, 1990.*

[4] Guffond D., Hedde T., Henry R., «Overview of icing research at ONERA,» *Advisory Group for Aerospace Research and Development / Fluid Dynamics Panel (AGARD/FDP) Joint International Conference on Aircraft Flight Safety - Actual Problems of Aircraft Development. - Zhukovsky, Russia, 1993.*

[5] Tran P., Brahim M. T., Paraschivoiu I. P. A., Tezok F., «Ice accretion on aircraft wings with thermodynamic effects,» *American Institute of Aeronautics and Astronautics, 32nd Aerospace Sciences Meeting & Exhibit. Reno, Nevada, AIAA Paper, т. N 0605, 1994.*

[6] Dillingh J. E., Hoesjmakers H. W. M., «Accumulation of ice accretion on airfoils during flight,» *Federal Aviation Administration In-flight Icing and Aircraft Ground De-icing Conference. - Chicago, Illinois, 2003.*

[7] Bourgault, Yves; Boutanios, Ziad; Habashi, Wagdi G. «Three-Dimensional Eulerian Approach to Droplet Impingement Simulation Using FENSAP-ICE, Part 1: Model, Algorithm, and Validation,» *Journal of Aircraft, № No. 1, January - February 2000.*

[8] Honsek, Raimund, «Development of a Three - Dimensional Eulerian Model of Droplet - Wall Interaction Mechanisms,» *Department of Mechanical Engineering McGill University Montreal, June, 2005.*

[9] Hughes T., Mallet M., «A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: III The Generalized Streamline Operator for Multidimensional Advective - Diffusive Systems,» *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, т. Vol 58, 1986.*

[10] Волков А. В., «Методы решения сеточных уравнений конечно - элементной аппроксимации пространственных течений,» *Ученые записки ЦАГИ*, т. №3, № Том XLI, 2010.

[11] Волков А. В., «Особенности применения метода Галеркина к решению пространственных уравнений Навье - Стокса на неструктурированных гексаэдральных сетках,» *Ученые записки ЦАГИ*, т. №6, № Том XL, 2009.

[12] Власенко В. В., Волков А. В., Трошин А. И., «Выбор метода аппроксимации вязких членов в методе Галеркина с разрывными базисными функциями,» *Ученые записки ЦАГИ*, т. № 3, № Том XLIV, 2013.

[13] Cao Y., Zhang Q., Sheridan J., «Numerical simulation of rime ice accretions on an aerofoil using an Eulerian method,» *The aeronautical journal*, p. 243, 2008.

[14] «<http://www.continuummechanics.org/cm/continuityequation.html>».

[15] Сивухин Д. В., *Общий курс физики, Механика, Том 1*, Москва: МФТИ, 2005.

[16] M. Snellen, O. J. Boelens и H. M. Hoesjmakers, «A Computational Method for Numerically Simulating Ice Accretion,» *AIAA Paper 2206*, 1997.

[17] Wolkov A. V., «Application of the Multigrid Approach for Solving 3D Navier -Stokes Equations on Hexahedral Grids Using the Discontinuous Galerkin Method,» *ISSN 0965-5425, Computational Mathematics and Mathematical Physics*, т. Vol 50, pp. 495-508, 2010.

[18] Волков А. В., Ляпунов С. В., «Исследование эффективности использования численных схем высокого порядка точности для решения уравнений Навье-Стокса и Рейнольдса на неструктурированных адаптивных сетках,» *Журнал вычислительной математики и математической физики*, т. 46, № 10, pp. 1894-1907, 2006.

[19] Волков А. В., Ляпунов С. В., «Применение конечно-элементного метода Галеркина с разрывными базисными функциями к решению уравнений Рейнольдса на неструктурированных адаптивных сетках,» *Ученые записки ЦАГИ*, т. XXXVIII, № № 3-4, 2007.

[20] Bassi F., Rebay S., Mariotti G., Pedinotti S. Savini M., «A high-order accurate discontinuous finite element method for inviscid and viscous

turbomachinery flows,» *Fluid Dynamics and Thermodynamics - Technologisch Instituut, Antwerpen, Belgium*, pp. 99-108, 1997.

[21] https://en.wikipedia.org/wiki/Lax%E2%80%93Friedrichs_method.

[22] Hospers J. M., Eulerian method for super-cooled large-droplet ice-accretion on aircraft wings, 2013.

[23] Bidwell C., Mohler S., «Collection Efficiency and Ice Accretion Calculations for a Sphere, a Swept MS(1)-317 Wing, a Swept NACA-0012 Wing Tip, an Axisymmetric Inlet and a Boeing 737-300 Inlet,» *AIAA Paper 95-0755*, Jan. 1995.